Ultrafiltri e metodi non standard, esercizi lezione 2

Luigi Marangio

1 Esercizio 1

Siano I e J due insiemi e $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ due ultrafiltri su I e J; dimostrare che:

1. $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro;

2. $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ lo sono;

3. $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$, con $\mathcal{W}$ ultrafiltro su K;

4. $\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$

1.1 Soluzione

1. $I \times J \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I : (I \times J)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$; ma qualunque sia i, la fibra $(I \times J)$ è uguale a J, dunque $I \times J \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I : J \in \mathcal{V}\} = I \in \mathcal{U}$; ma $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro quindi $I \in \mathcal{U}$.

   Sovrainsieme. Sia $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ e $B \supset A$, dimostriamo che $\{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Osserviamo che per ogni $i \in I$, $B_i \supset A_i$ e dunque $\{i : B_i \in \mathcal{V}\} \supset \{i : A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e poichè $\mathcal{U}$ è un filtro $\{i : B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, come volevasi dimostrare.

   Compatibilità. Siano $A, B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, mostriamo che $\{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$; a tal fine basta osservare che $(A \cap B)_i = A_i \cap B_i$, e quindi $\{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} = \{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \cap \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, sempre per le proprietà di ultrafiltro.

   Massimalità. Sia $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$; allora $\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$, ma $\mathcal{U}$ è massimale, quindi $\mathcal{U} \ni \{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\}^c = \{i \in I : A_i \notin \mathcal{V}\}$, e poichè anche $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro, $\{i \in I : A_i^c \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, cioè $A^c \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, cioè $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è massimale.

2. Se $\mathcal{U}$ è principale su $i \in I$ e $\mathcal{V}$ è principale su $j \in J$ allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale su $(i, j) \in I \times J$; infatti $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n : A_n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow i \in \{n : A_n \in \mathcal{V}\} \Leftrightarrow A_i \in \mathcal{V} \Leftrightarrow j \in A_i \Leftrightarrow (i, j) \in A$.

   Viceversa dimostriamo che se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ non sono principali allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ non lo è. Supponiamo per assurdo che $F \subset I \times J$ sia un insieme finito in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$; allora $\{i \in I : F_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Osserviamo che $F_i = \{j \in$

$J : (i,j) \in F\}$ è un insieme finito (per ogni i), poichè F stesso è un insieme finito. Ma $\mathcal{V}$ è non principale, quindi non contiene insiemi finiti, quindi $\mathcal{U} \ni \{i \in I : F_i \in \mathcal{V}\} = \emptyset$, assurdo.

3. Dimostriamo che $A \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} \Leftrightarrow A \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$, cioè dimostriamo che:

   $$B = \{(i,j) \in I \times J : A_{ij} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I : A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}\} \in \mathcal{U},$$

   con $A_{ij} = \{k \in K : (i,j,k) \in A\}$ e $A_i = \{(j,k) \in J \times K : (i,j,k) \in A\}$. Osserviamo che $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e che le fibre di B non sono altro che $B_i = \{j : (i,j) \in B\} = \{j : A_{ij} \in \mathcal{W}\}$; poichè inoltre $(A_i)_j = \{k : (j,k) \in A_i\} = \{k : (i,j,k) \in A\} = A_{ij}$, possiamo concludere che $A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \Leftrightarrow B_i \in \mathcal{V}$. Ma allora $\mathcal{U} \ni \{i : B_i \in \mathcal{V}\} = \{i : A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}\}$, come volevasi dimostrare.

4. Supponiamo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ siano due ultrafiltri distinti non principali sull'insieme I. Poichè sono ultrafiltri non ci sono relazioni di contenimento tra i due, e quindi possiamo affermare che esistono $A, B \subset I$, tali che

   $$A \in \mathcal{V} \wedge A^c \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \wedge B^c \in \mathcal{V}$$

   . Consideriamo il seguente insieme:

   $$I \times I \supset S = A \times I \cup I \times B;$$

   $S \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, infatti le fibre sono $S_i = \{j : (i,j) \in S\}$, dunque se $i \in A \Rightarrow S_i = I$, mentre $i \in A^c \Rightarrow S_i = B$; allora $\{i \in I : S_i \in \mathcal{V}\} = A \notin \mathcal{U}$, come volevasi dimostrare.

   $S \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$, infatti le fibre sono $S_j = \{i : (i,j) \in S\}$, e dunque se $j \in B \Rightarrow S_j = I$, mentre se $j \in B^c \Rightarrow S_j = A$. Allora $\{j : S_j \in \mathcal{U}\} = B \in \mathcal{U}$, come volevasi dimostrare.

2 Esercizio 2

Teorema 2.1 (Ramsey infinito, $k = 3$)**.**
$[\mathbb{N}]^3 = C_1 \cup \cdots \cup C_r \Rightarrow \exists H$ infinito, $\exists i$ tale che $[H]^3 \subset C_i$.

2.1 Soluzione

Come nel caso $k = 2$, visto a lezione, identifichiamo $[\mathbb{N}]^3 \equiv \Delta^+ = \{(n_1, n_2, n_3) : n_1 < n_2 < n_3\}$; anche in questo caso è facile vedere che preso $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$, allora $\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.

Per concludere la dimostrazione, come in $k = 2$, ci basta dimostrare il seguente asserto:

$$B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Rightarrow \exists H \text{ infinito } : [H]^3 \subset B.$$

Osserviamo che $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow B \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) \otimes \mathcal{U}$, cioè se e solo se $\hat{\mathrm{B}}= \{(i, j) : B_{ij} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, con $B_{ij} = \{k : (i, j, k) \in B\}$.

Quindi $\hat{\mathrm{B}} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e quindi per il teorema di Ramsey, esiste una successione infinita crescente $H = (h_i) \subset \hat{\mathrm{B}}$, tale che $(h_i, h_j) \in \hat{\mathrm{B}} \Leftrightarrow i < j$. L'idea ora è quella di "aggiustare" questa successione, in modo che $(h_i, h_j, h_k) \in B \Leftrightarrow i < j < k$ e questo basta a dimostrare la tesi.

Ordiniamo l'insieme delle triple (e quello delle coppie), con l'ordine lessicografico (la prima componente conta di più, e così via). Iniziamo a scorrere $[H]^3$ e quando troviamo una tripla che non va bene, cioè tre indici $p < q < r$ tali che $(h_p, h_q, h_r) \notin B$, effettuiamo il seguente scambio:

consideriamo $\bigcap_{(i,j)\leq(p,q)} B_{ij}$, e osserviamo che ogni $B_{ij} \in \mathcal{U}$, poichè $(h_i, h_j) \in \hat{\mathrm{B}}$. Dunque tutta l'intersezione è in $\mathcal{U}$, che essendo non principale contiene solo insiemi infiniti. Quindi possiamo scegliere uno $\xi \in \bigcap_{(i,j)\leq(p,q)} B_{ij}$, e sostituirlo ad h_r. Chiamati a, b il massimo e il minimo indice tali che $h_a < h_r < h_b$, scegliamo ξ compreso tra h_a e h_b; se ciò non possibile si prende $\xi > h_a$ e si cancellano tutti gli h_i compresi tra h_a e il nuovo ξ.

Ripetendo questo ragionamento ogni volta che si trova una tripla "sbagliata", si ottiene l'insieme desiderato.

3 Esercizio 3

Dare una dimostrazione *standard* del teorema di Ramsey.

3.1 Soluzione

Per induzione su n. Il passo base, $k = 1$, è il principio dei cassetti.

Per $k > 1$, identifichiamo $[\mathbb{N}]^{k-1}$ con $\Delta^+ = \{(s_1, \cdots, s_{k-1}) : s_1 < \cdots < s_{k-1}\}$ Per ogni j , considero le colorazione $[\mathbb{N}]^{k-1} = C_1^j \cup \cdots \cup C_r^j$, definita da

$$(s_1, \cdots, s_{k-1}) \in C_p^q \Leftrightarrow (q, s_1, \cdots, s_{k-1}) \in C_p.$$

Per ipotesi induttiva ho infiniti insiemi infiniti H_j tali che $[H_j]^{k-1} \subset C_p^j$, per un certo p, $1 \leq p \leq r$. Per concludere, basta prendere $h_0 = 0$, e $h_{m+1} \in H_m$. Infatti la successione (h_m) è infinita e quindi contiene una estratta, sia (h_{m_t}), monocromatica, cioè tale che $(h_{m_t}) \subset C_p^j$, per un certo j, in quanto il numero dei colori possibili è finito.

(Dimostrazione vista nel corso di Teoria dei Modelli)