Ultrafiltri e metodi non standard, esercizi lezione 1

Luigi Marangio

1 Esercizio 1

Sia $\mathcal{G}$ un filtro su un insieme I. Allora sono equivalenti:

1. Se $A^c \notin \mathcal{G}$ allora $A \in \mathcal{G}$;
2. se $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{G}$ allora $\exists i$ tale che $A_i \in \mathcal{G}$;
3. $\mathcal{G}$ è massimale.

1.1 Soluzione

Per prima cosa portiamo a casa un lemmino:

Lemma 1.1. Sia I un insieme e $S \subset \mathcal{P}(I)$. Allora esiste un filtro su I che contiene S se e solo se ogni sottofamiglia finita di S ha intersezione non vuota.

Dunque se S gode della proprietà dell'intersezione finita (PIF), esiste il più piccolo filtro contenente S, che chiamerò filtro generato da S.

Dimostrazione. Ovviamente se S è contenuto in un filtro, per definizione di filtro, deve soddisfare la PIF. Vediamo l'altra implicazione:
supponiamo che S abbia la PIF, dimostriamo che

$$\mathcal{G} = \{G \subset I \,:\, \exists k \exists S_1, \cdots, S_k \subset S \text{ tali che } \bigcap_{i=1}^{k} S_i \subset G\}$$

è un filtro contenente S. Sicuramente $I \in \mathcal{G}$, perchè ogni intersezione di sottoinsiemi di I è un sottoinsieme di I; mentre $\emptyset \notin \mathcal{G}$, perchè S ha la PIF. Dalla definizione di $\mathcal{G}$ è ovvio che le proprietà di sovrainsieme e compatibilità (per intersezione) sono soddisfatte. □

Adesso possiamo dare una soluzione all'esercizio:

(1)→(2) Supponiamo per assurdo che (2) sia falsa. Allora $\forall i = 1, \cdots, n$, $A_i \notin \mathcal{G}$. Per l'ipotesi (1), possiamo dunque affermare che $\forall i = 1, \cdots, n$, $A_i^c \in \mathcal{G}$. Ma $\mathcal{G}$ è un filtro, quindi $\bigcap A_i^c = (\bigcup A_i)^c \in \mathcal{G}$; ma anche $\bigcup A_i \in \mathcal{G}$, e quindi $(\bigcup A_i)^c \cap \bigcup A_i = \emptyset \in \mathcal{G}$, assurdo.

(2)→(3) Supponiamo per assurdo che (3) sia falsa. Allora esiste un filtro $\mathcal{H}$ che contiene strettamente $\mathcal{G}$. In particolare esiste un sottoinsieme di I, sia A, tale che $A \in \mathcal{H} \wedge A \notin \mathcal{G}$. Osserviamo che $\mathcal{G} \ni I = A \cup A^c$, quindi per (2), $A^c \in \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Quindi A^c e A sono in $\mathcal{H}$, dunque anche la loro intersezione lo è, $A^c \cap A = \emptyset \in \mathcal{H}$, assurdo.

(3)→(1) Supponiamo per assurdo che (1) sia falsa. Allora esiste un sottoinsieme di I, sia A, tale che $A^c \notin \mathcal{G} \wedge A \notin \mathcal{G}$. Dimostriamo che $\mathcal{G} \cup \{A\}$ ha la PIF. Supponiamo per assurdo che esistano $G_1 \cap \cdots \cap G_k \cap A = \emptyset$, con $G_i \in \mathcal{G}$. Poichè $\mathcal{G}$ è un filtro esiste $G \in \mathcal{G}$ tale che $G_1 \cap \cdots \cap G_k \cap A = G \cap A = \emptyset$. Ma allora $G \subset A^c$, e dunque per sovrainsieme $A^c \in \mathcal{G}$, assurdo. Dunque per il lemma 1.1 esiste il filtro generato da $\mathcal{G}$ e A, sia $\mathcal{H}$, che estende $\mathcal{G}$, ed è proprio perchè $A^c \notin \mathcal{H}$; assurdo perchè $\mathcal{G}$ è massimale.

2 Esercizio 2

Sia I un insieme. Dato $\varphi \in Fun(I, \mathbb{R})$ definiamo $Z(\varphi) = \{i : \varphi(i) = 0\}$. Dimostrare che:

1. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, allora $\mathcal{M} = \{\varphi : \ Z(\varphi) \in \mathcal{U}\}$ è un ideale massimale di $Fun(I, \mathbb{R})$;

2. Se $\mathcal{M}$ è un ideale massimale di $Fun(I, \mathbb{R})$, allora $\mathcal{U} = \{Z(\varphi) : \ \varphi \in \mathcal{M}\}$ è un ultrafiltro su I.

2.1 Soluzione

1. $\mathcal{M} = \{\varphi : \ Z(\varphi) \in \mathcal{U}\}$ è un sottogruppo additivo di $\big(Fun(I, \mathbb{R}), +\big)$:

   $Z(0_{Fun}) = I \in \mathcal{U}$, quindi $0_{Fun} \in \mathcal{M}$; se $f, g \in \mathcal{M}$, allora $Z(f)$ e $Z(g)$ sono in $\mathcal{U}$; osserviamo che $Z(f) \cap Z(g) \subset Z(f+g)$, e dunque per le proprietà di filtro $Z(f+g) \in \mathcal{U}$, e quindi $f + g \in \mathcal{M}$. Per l'inverso basta osservare che $Z(f) = Z(-f)$.

   $\mathcal{M} = \{\varphi : \ Z(\varphi) \in \mathcal{U}\}$ è un ideale di $\big(Fun(I, \mathbb{R}), +, \cdot\big)$:

   sia $f \in Fun(I, \mathbb{R})$ e $m \in \mathcal{M}$, osserviamo che $Z(f \cdot m) = Z(f) \cup Z(m) \supset Z(m)$, quindi per sovrainsieme $Z(f \cdot m) \in \mathcal{U}$, cioè $f \cdot m \in \mathcal{M}$.

   $\mathcal{M}$ è massimale:

   supponiamo di avere un ideale $\mathcal{N} \supsetneq \mathcal{M}$, dimostriamo che $\mathcal{N} = Fun(I, \mathbb{R})$, e dunque che $\mathcal{M}$ è massimale. Per quanto supposto $\exists \varphi : \varphi \in \mathcal{N} \wedge \varphi \notin \mathcal{M}$. Per definizione di $\mathcal{M}$, abbiamo che $Z(\varphi) \notin \mathcal{U}$, e per la proprietà di ultrafiltro si ha $Z(\varphi)^c \in \mathcal{U}$. Considero $\psi \in Fun(I, \mathbb{R})$ tale che

   $$\psi(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in Z(\varphi)^c \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poichè $Z(\psi) = Z(\varphi)^c \in \mathcal{U}$, allora $\psi \in \mathcal{M}$ e quindi $\psi \in \mathcal{N}$. Ora basta osservare che $\psi + \varphi$ è un elemento di $\mathcal{N}$ che ha tutte le componenti non nulle, dunque invertibile, dunque $\mathcal{N} = Fun(I, \mathbb{R})$, come volevasi dimostrare.

2. $\mathcal{U}$ è un filtro:

   se per assurdo $\emptyset \in \mathcal{U}$, allora la successione di tutti uni è in $\mathcal{M}$, e quindi $\mathcal{M}$ non è proprio, assurdo. D'altrone $\mathcal{M}$ è un ideale, quindi $0 \in \mathcal{M}$, e quindi $Z(0) = I \in \mathcal{U}$.

   Siano φ e ψ due elementi di $\mathcal{M}$, dimostriamo che $Z(\varphi) \cap Z(\psi) \in \mathcal{U}$. A tal fine basta trovare una successione in $\mathcal{M}$ che si annulla in tutti gli i in cui si annullano entrambe le successioni φ e ψ. Allora considero la successione $\varphi^2 + \psi^2$, che è in $\mathcal{M}$, in quanto $\mathcal{M}$ è un ideale.

   Ora considero $A = Z(\tau) \in \mathcal{U}$ e $B \supset A$; voglio dimostrare che esiste una successione in $\mathcal{M}$ che si annulla in i se e solo se $i \in B$. Considero

$$a(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in B \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Poichè $\mathcal{M}$ è un ideale, $\tau \cdot a \in \mathcal{M}$, e $Z(\tau \cdot a) = B$.

   $\mathcal{U}$ è massimale:

   supponiamo per assurdo non sia massimale. Sfruttando l'esercizio 1 deduciamo l'esistenza di un sottoinsieme di I, sia A, tale che $A \notin \mathcal{U} \wedge A^c \notin \mathcal{U}$. Considero due elementi di $Fun(I, \mathbb{R})$, φ_1, φ_2, così definiti:

$$\varphi_1(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in A \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\varphi_2(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Per le ipotesi su A, φ_1 e φ_2 non appartengono a $\mathcal{M}$. Ma allora l'ideale generato da $\mathcal{M}$ e φ_1 contraddice la massimalità di $\mathcal{M}$. Ci basta controllare che $< \mathcal{M}, \varphi_1 >$ è un ideale proprio, e lo facciamo mostrando che $\varphi_2 \notin < \mathcal{M}, \varphi_1 >$. Se per assurdo fosse così, allora si avrebbe una relazione algebrica del tipo:

$$a_1 m_1 + \cdots + a_k m_k + b\varphi_1 = \varphi_2,$$

   con $a_i, b \in Fun(I, \mathbb{R})$ e $m_i \in \mathcal{M}$. Da questa deduciamo

$$a_1 m_1 + \cdots + a_k m_k = -b\varphi_1 + \varphi_2,$$

   ottenendo $\varphi_2 - b\varphi_1 \in \mathcal{M}$. Osservando che $\varphi_2 - b\varphi_1$ è un elemento invertibile, otteniamo un assurdo, perchè $\mathcal{M}$ è un ideale proprio.

3 Esercizio 3

Sia (X, τ) uno spazio topologico e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Dimostrare che:

1. X è compatto $\Leftrightarrow$ ogni successione ha $\mathcal{U}$-limite;

2. X è T_2 $\Leftrightarrow$ ogni successione ha al più un $\mathcal{U}$-limite.

3.1 Soluzione

1. Assumiamo X compatto. Sia (x_n) una successione in X. Supponiamo per assurdo non valga la tesi. Allora $\forall x \in X \, \exists V_x$ intorno aperto di x tale che $I_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_x\} \notin \mathcal{U}$. Sia $\mathcal{P} = \{V_x : x \in X\}$ un ricoprimento aperto di X; per compattezza ne estraggo uno finito e scrivo $X = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k}$, con $y_i \in X$, $k > 0$. Quindi si ha $\mathcal{U} \ni \mathbb{N} = I_{y_1} \cup \cdots \cup I_{y_k}$, e quindi per la proprietà di ultrafiltro, $\exists j : I_{y_j} \in \mathcal{U}$, assurdo.

   Per dimostrare l'altra implicazione, supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Allora esiste un ricoprimento aperto di X, sia $\mathcal{P} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, tale che $\mathcal{P}$ non ammette un sottoricoprimento finito (sto supponendo X a base numerabile). Considero ora una successione (x_n) tale che $\forall i \big(x_i \in A_i \wedge \forall j \neq i \, , x_i \notin A_j\big)$. Tale successione esiste per l'assioma della scelta. Per ipotesi (x_n) ammette $\mathcal{U}$ limite, sia y. Considero ora un intorno V di y tale che $\exists ! k : V \subset A_k$ (lo posso fare rimpicciolendo V a piacere). Per la proprietà di $\mathcal{U}$-limite vale che $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} = \{k\} \in \mathcal{U}$, assurdo poichè $\mathcal{U}$ è non principale e dunque non contiene insiemi finiti.

2. Assumiamo X T_2. Supponiamo per assurdo che esista una successione (x_n) in X con due $\mathcal{U}$-limiti distinti, siano x_1 e x_2. Allora per ipotesi esistono due intorni disgiunti U, V, rispettivamente di x_1 e x_2. Per le proprietà di $\mathcal{U}$-limite, gli insiemi $I = \{n : x_n \in U\}$ e $J = \{n : x_n \in V\}$ sono in $\mathcal{U}$. Peccato che $I \cap J = \emptyset$, assurdo.

   Viceversa, supponiamo per assurdo di avere due punti y_1, y_2 in X senza intorni disgiunti. Consideriamo due sistemi fondamentali di intorni $\{V_i\}$ e $\{W_i\}$ rispettivamente di y_1 e y_2, che supponiamo essere crescenti per inclusione. Consideriamo la successione (a_n) tale che $a_i \in V_i \cap W_i$, $\forall i$. Sia ora Y_1 un intorno di y_1, e sia k tale che $V_k \subset Y_1$. Osserviamo che l'insieme $\{n : a_n \in V_k\}$ è cofinito e dunque appartiene ad $\mathcal{U}$. Dalla generalità di Y_1 si deduce che (a_n) ha $\mathcal{U}$-limite y_1, e ripetendo lo stesso ragionamento per y_2 si deduce che anche quest'ultimo è limite della successione (a_n), assurdo.

4 Esercizio 4

Teorema 4.1 (Tyconoff)**.** Il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi topologici compatti è compatto.

4.1 Soluzione

Chiamiamo $X = \prod_{i \in I} X_i$ gli spazi topologici in questione. Supponiamo per ogni i, X_i compatto, e dimostriamo che anche X lo è; per farlo consideriamo una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ in X, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $\mathbb{N}$, e dimostriamo che (x_n) ammette $\mathcal{U}$-limite, per l'esercizio precedente si avrà la tesi.

Poichè X_i è compatto, la proiezione della successione su X_i, sia (x_n^i), ammette $\mathcal{U}$-limite, sia $\overline{x}_i$, e questo accade per ogni i. Il nostro scopo ora è dimostrare che $\overline{x} = (\overline{x}_i)_I$ è $\mathcal{U}$-limite della successione (x_n).

Dato $x \in X$, un sistema fondamentale d'intorni di X è dato dagli insiemi della forma:

$$U_J = \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{j \notin J} X_j,$$

dove J è un sottoinsieme finito di I.

Possiamo dunque supporre senza perdere generalità che un intorno di $\overline{x}$ sia della forma espressa prima, non cambiamo notazioni per comodità; allora basta osservare che

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_J\} = \{n : x_n^j \in A_j\ ,\ \forall j \in J\} = \bigcap_{j \in J} \{n : x_n^j \in A_j\};$$

per ogni $j \in J$, A_j è un intorno di $\overline{x}_j$, e quindi ognuno degli insiemi $\{n : x_n^j \in A_j\}$ è in $\mathcal{U}$, e quindi anche la loro intersezione su J (che è finito) è in $\mathcal{U}$, come volevasi dimostrare.