Esercizi del corso di “Ultrafiltri e metodi non standard”

Giada Franz

16 marzo 2015

1 Il teorema dei 3 colori

Proponiamo qui di seguito due dimostriamo del teorema dei 3-colori.

Teorema 1.1 (3 colori)**.** *Sia $f : X \to X$ una funzione senza punti fissi, allora la famiglia $\mathcal{F} = \{\{x\,,\ f(x)\} \mid x \in X\}$ non è 3-regolare su X.*

Definizione 1.2. Chiamiamo *buona* una 3-colorazione di un sottoinsieme Y di X se y ed $f(y)$ hanno colori diversi per ogni $y \in Y$ tale che $f(y) \in Y$.

Nota 1.3. Risulta immediato dalla definizione che $\mathcal{F} = \{\{x\,,\ f(x)\} \mid x \in X\}$ non è 3-regolare su X se e solo se X ammette una 3-colorazione *buona*. Quindi per dimostrare il Teorema 1.1 (3 colori), ci basta trovare una 3-colorazione *buona* per X.

Nota 1.4. Analogamente notiamo inoltre che $\mathcal{F}$ non è 3-regolare su un sottoinsieme $Y \subseteq X$ se e solo se Y ammette una 3-colorazione *buona*.

La prima dimostrazione che riportiamo del Teorema 1.1 (3 colori) si avvale di metodi classici della combinatoria e costruisce una 3-colorazione *buona* di X utilizzando il lemma di Zorn.

Dimostrazione 1. Sia Σ la famiglia dei sottoinsiemi Y di X chiusi rispetto a f e non 3-regolari, associati ad una loro 3-colorazione *buona*. Poniamo inoltre su Σ la relazione d'ordine tale che $Y_1 \leq Y_2$ se $Y_1 \subseteq Y_2$ e la 3-colorazione di Y_2 ristretta ad Y_1 coincide con la 3-colorazione di quest'ultimo.

Mostriamo che $(\Sigma\,,\ \leq)$ è un insieme induttivo. Prendiamo una catena $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ e consideriamo $Y = \cup_i Y_i$ con la 3-colorazione indotta dagli Y_i, cioè $y \in Y$ ha il colore C se esiste $i \in I$ tale che y ha il colore C in Y_i. Tale colorazione è ben definita perché se y ha colore C in Y_i, ha colore C in tutti gli Y_j tali che $y \in Y_j$, dato che $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una catena. Dato ora $y \in Y$ esiste $i \in I$ tale che $y \in Y_i$, ma allora $f(y) \in Y_i \subseteq Y$, visto che Y_i è chiuso rispetto ad f. Inoltre y ed $f(y)$ hanno colori diversi in Y_i e quindi anche in Y. Perciò Y è chiuso rispetto ad f e associato ad una 3-colorazione *buona*, perciò appartiene a Σ e banalmente maggiora tutti gli Y_i.

Abbiamo quindi mostrato che $(\Sigma\,,\ \leq)$ è induttivo e di conseguenza per il lemma di Zorn esiste un elemento $M \in \Sigma$ massimale rispetto all'inclusione. Supponiamo che M non sia tutto X; esiste quindi $x \in X \setminus M$. Consideriamo allora $Z = \{z \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}\ z = f^{(n)}(x)\}$ l'insieme di tutti gli elementi di X raggiungibili da x applicando f un numero finito di volte. Allora banalmente $M \cup Z$ è chiuso rispetto ad f, vogliamo mostrare che ammette anche una 3-colorazione *buona* che estende quella di M, contraddicendo l'ipotesi di massimalità e mostrando quindi $M = X$, che è proprio quello che volevamo.

È molto facile osservare che Z o è un ciclo di lunghezza finita che non interseca M, o è una catena che dopo un numero finito di elementi interseca M e vi rimane poi sempre contenuta (M è chiuso rispetto ad f), oppure è una catena infinita che non interseca M. Distinguiamo quindi 3 casi:

- Se Z è un ciclo di lunghezza finita, possiamo facilmente colorarlo con al più 3 colori. Da cui risulta che $M \cup Z$ ammette una 3-colorazione *buona* perché M e Z sono disgiunti.
- Se Z è una catena contenuta in M da un certo punto in poi, riusciamo anche qui facilmente a colorare $Z \setminus M$ alternando due colori e al più usando il terzo colore per aggiustare l'intersezione con M.
- Se Z è una catena infinita che non interseca M la coloriamo alternando due colori.

Da tutti e tre i casi risulta quindi facilmente che $M \cup Z$ ammette una 3-colorazione *buona*, da cui la tesi per quanto detto precedentemente. $\square$

Per la seconda dimostrazione sfrutteremo gli ultrafiltri attraverso il seguente teorema di compattezza combinatoria dimostrato a lezione.

Teorema 1.5 (compattezza combinatoria)**.** *Data una famiglia di insiemi finiti $\mathscr{A}$ che è r-regolare su X, esiste un sottoinsieme finito Y di X tale che $\mathscr{A}$ è r-regolare su Y.*

L'idea sarà utilizzare tale teorema per restringere il problema ad un insieme finito, sul quale possiamo dimostrare il teorema dei 3-colori il modo molto semplice e immmediato.

Dimostrazione 2. Supponiamo per assurdo che la famiglia $\mathcal{F}$ sia 3-regolare su X, allora per il Teorema 1.5 (compattezza combinatoria) esiste un sottoinsieme finito Y di X tale che $\mathcal{F}$ è 3-regolare su Y.

Dimostriamo però ora che dato un sottoinsieme finito $Y \subseteq X$, esiste sempre una 3-colorazione *buona* di Y. Questo contraddirebbe il fatto che Y sia 3-regolare e di conseguenza che anche X lo sia, concludendo la dimostrazione.

Consideriamo il grafo diretto finito che ha come vertici gli elementi di Y e ha un arco dal nodo x al nodo y se $y = f(x)$. Avrei facilmente la tesi se riuscissi a colorare i nodi di tale grafo in modo che i vertici di un arco abbiano sempre colori diversi. Notiamo innanzitutto che mi basta riuscire a colorare ogni componente connessa separatamente. Sfruttando che il grado in uscita da ogni vertice è al più 1, è facile osservare che una componente connessa di tale grafo è un albero oppure un unico ciclo con delle diramazioni semplici ("linee" di vertici) che arrivano ad alcuni nodi del ciclo. Nel primo caso è ovvio che si possa colorare il grafo con due colori, basta infatti radicare il grafo in un nodo e colorare alternativamente i vertici alla stessa altezza (primo colore alla radice, secondo colore a quelli ad altezza 1, primo colore a quelli ad altezza 2, ecc.). Nel secondo caso invece riusciamo innanzitutto a colorare il ciclo con 3 colori (ne bastano 2 se il ciclo ha lunghezza pari) e successivamente coloriamo tutti i grafi lineari che escono dal ciclo, alternando i colori partendo dal vertice sul ciclo, che è già colorato. □