Analisi Non-Standard

Gioacchino Antonelli

March 16, 2015

E' semplice notare che su un campo ordinato $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^+)$ ha senso definire un modulo: ovverosia $|x| = x$ se $x \in \mathbb{F}^+$ oppure $x = 0$ e $|x| = -x$ se $x \in \mathbb{F}^-$. In questo modo vale la disuguaglianza triangolare: infatti ovviamente $-|x| \leq x \leq |x| \, \forall x \in \mathbb{F}$ e dunque $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ da cui $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Abbiamo notato a lezione, anche, che se $\alpha \in {}^\star\mathbb{R}$ è finito allora ammette un'unica parte standard: ovvero esiste uno ed un solo $r \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \sim r$, ovvero $|\alpha - r|$ è un infinitesimo positivo. E' chiaro che è sufficiente mostrarlo per $\alpha \geq 0$. Prendo $r := \sup\{x \in \mathbb{R} | x < \alpha\}$. Sicuramente il sup esiste finito poiché α è limitato. Voglio inoltre mostrare che $|r - \alpha| < s$ per qualsiasi s reale positivo. Infatti se così non fosse avrei che esiste un $s^\star$ tale che $|r - \alpha| > s^\star$. Se $r - \alpha < -s^\star$ allora $r + s^\star < \alpha$ ed essendo $r + s^\star$ un reale strettamente maggiore di r avrei il sup non potrebbe essere r (perché la disuguaglianze sarebbe soddisfatta da un reale più grande). Dunque, dovendo essere $|r - \alpha| > s^\star$ e non potendo essere $r - \alpha < -s^\star$, ho che deve essere $r - \alpha > s^\star$. Per definizione di sup, inoltre,$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste un certo $r - \epsilon \leq \beta < r$ tale che $\beta < \alpha$. Allora scegliendo $\epsilon = s^\star$ esiste sicuramente un $r - s^\star \leq \beta < r$ tale che $\beta < \alpha$. Dunque $r - s^\star \leq \beta < \alpha$ da cui $r - \alpha < s^\star$. Dunque ciò è un assurdo.

Per dimostrare l'unicità suppongo che esistano due $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $r \sim \alpha \sim s$. Allora $|r - \alpha| < x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e $|\alpha - s| < y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ da cui per la triangolare $|r - s| < x + y$ per ogni x, y in $\mathbb{R}^+$ che è palesemente assurdo.

Osservazione 1: *Le operazioni con le parti standard sono perfettamente conservate come ci si aspetterebbe: ad esempio se α e β sono numeri iperreali finiti, st(α)st(β)=st($\alpha\beta$)*

Dimostrazione: Sia st(α)=r e st(β)=s, essendo s e r numeri reali finiti. Allora per ogni ϵ, δ numeri reali positivi, $|\alpha - r| < \epsilon$ e $|\beta - s| < \delta$. Allora $|\alpha\beta - rs| = |\alpha\beta - \alpha s + \alpha s - rs| \leq |\alpha||\beta - s| + |s||\alpha - r|$, dove ho usato la disuguaglianza triangolare. Essendo α limitato esiste un certo r' reale tale che $|\alpha| < r'$. Dunque $|\alpha||\beta - s| + |s||\alpha - r| < r'\delta + |s|\epsilon$ che vale per ogni ϵ e δ reali positivi. Dunque $|\alpha\beta - rs| < r'\delta + |s|\epsilon$ per ogni ϵ e δ reali positivi e dunque, chiaramente $|\alpha\beta - rs| < \zeta$ per ogni ζ reale positivo, e ciò dimostra quanto volevo, vista l'unicità della parte standard.

Utilizzerò d'ora in poi la definizione ${}^\star A$ data a lezione, dove A è un qualunque sottoinsieme (per non banalizzare gli enunciati dei teoremi lo considererò sempre *non vuoto*) dei numeri reali. In particolare ${}^\star A := A^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, essendo $\mathcal{U}$ l'ultrafiltro usato per la costruzione degli iperreali.

Esercizio 1: *Mostrare i seguenti tre fatti:*

- *(*) Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, allora $[f] \in {}^\star A$ se e solo se $\{n|f(n) \in A\} \in \mathcal{U}$, essendo $\mathcal{U}$ l'ultrafiltro utilizzato per la costruzione del modello dei numeri iperreali.*
- ${}^\star(A \cap B) = {}^\star A \cap {}^\star B$.
- ${}^\star(A \setminus B) = {}^\star A \setminus {}^\star B$.

Dimostrazione:

- ($\Leftarrow$) Essendo A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto, chiamo $a \in A$ un suo elemento. Definisco $g : \mathbb{N} \to A$ in questo modo:

  $$g(n) = f(n) \text{ se } f(n) \in A \qquad g(n) = a \text{ se } f(n) \notin A$$

  Chiaramente $[g] = [f]$ poiché $\{n|g(n) = f(n)\} = \{n|f(n) \in A\} \in \mathcal{U}$ per ipotesi. Dunque $[f] \in {}^\star A$.

  ($\Rightarrow$). Se $[f] \in {}^\star A$, esiste $g : \mathbb{N} \to A$ tale che $[f] = [g]$, ovvero $X = \{n|f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Chiaramente $\{n|f(n) \in A\} \supseteq X$, poiché $g(n)$ è a valori in A. Ma data la chiusura per soprainsiemi degli ultrafiltri ho certamente $X \in \mathcal{U}$.

- ($\subseteq$) Chiara.

  ($\supseteq$) Ho $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Per quando mostrato prima, $[f] \in {}^\star A$ implica che $X = \{n|f(n) \in A\} \in \mathcal{U}$ e analogamente $[f] \in {}^\star B$ implica $Y = \{n|f(n) \in B\} \in \mathcal{U}$. Ovviamente $\{n|f(n) \in A \cap B\} = X \cap Y \in \mathcal{U}$ per una proprietà di ultrafiltro, e dunque per il punto precedente $[f] \in {}^\star(A \cap B)$.

- ($\subseteq$) Se $[f] \in {}^\star(A \setminus B)$, allora sicuramente $[f] \in {}^\star A$. Se per assurdo $[f] \in {}^\star B$, allora esisterebbe una certa $g : \mathbb{N} \to B$ tale che $\{n|f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Ma $\{n|f(n) = g(n)\} = \emptyset$ perché f non prende mai valori in B, mentre g sì. Dunque ho un assurdo.

  ($\supseteq$) Suppongo $A \setminus B \neq \emptyset$ altrimenti la tesi si dimostra facilmente, essendo A un sottoinsieme di B e non potendo dunque esistere $[f] \in {}^\star A$ che non siano anche in ${}^\star B$. Sia allora $a \in A \setminus B$ e sia $[f] \in {}^\star A \setminus {}^\star B$. Valendo questa appartenenza posso prenere $f : \mathbb{N} \to A$. Definisco f' nel modo seguente:

  $$f'(n) = f(n) \text{ se } f(n) \in A \setminus B \qquad f'(n) = a \text{ se } f(n) \in B$$

  Chiaramente $f' : \mathbb{N} \to A \setminus B$. Inoltre $\{n|f'(n) = f(n)\} = \{n|f'(n) \neq f(n)\}^c = \{n|f(n) \in B\}^c$. Siccome $[f] \notin {}^\star B$, per l'equivalenza mostrata nel primo punto, $\{n|f(n) \in B\} \notin \mathcal{U}$ e dunque $\{n|f(n) \in B\}^c \in \mathcal{U}$ per una proprietà di ultrafiltro. Allora, per definizione, $[f'] = [f]$ ma $[f'] \in {}^\star A \setminus B$, come volevasi mostrare.

Come detto a lezione, data $f : A \to B$, si definisce ${}^\star f : {}^\star A \to {}^\star B$ in tal modo:

$$\text{se } [v] \in {}^\star A; \qquad {}^\star f([v]) = [f \circ v]$$

Si verifica che questa è una buona definizione.

Esercizio 2: *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. f è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall {}^\star\mathbb{R} \ni \alpha \sim x_0$, allora ${}^\star f(\alpha) \sim f(x_0)$.*

Dimostrazione: Mostro che la continuità in senso classico implica quella non-standard.

Per ipotesi ho che $\forall\epsilon\exists\delta|\forall|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Fisso $x_0 \sim \alpha \in {}^\star\mathbb{R}$. Ricordando il modello $\alpha = [v]$ dove $v : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$. Essendo $\alpha \sim x_0$ ho che $|\alpha - x_0| < \delta \ \forall\delta \in \mathbb{R}^+$. Ricordando che $\mathbb{R}$ si immerge in ${}^\star\mathbb{R}$ con le successioni costanti, ciò vuol dire che $\forall\delta \in \mathbb{R}^+ \quad X = \{n||v(n) - x_0| < \delta\} \in \mathcal{U}$. Fissato ϵ arbitrario considero il δ dato dalla formulazione della continuità. Vale chiaramente che $X = \{n||v(n) - x_0| < \delta\} \in \mathcal{U}$ e dunque $Y = \{n||f(v(n)) - f(x_0)| < \epsilon\} \supseteq X$ per continuità. Inoltre $Y \in \mathcal{U}$ vista la chiusura per soprainsieme e dunque, data l'arbitrarietà di ϵ, ciò significa, appunto per definizione, che $|{}^\star f(\alpha) - f(x_0)| < \epsilon$ per ogni ϵ reale positivo e dunque ${}^\star f(\alpha) \sim f(x_0)$.

Mostro per assurdo che la continuità non-standard implica quella classica. La negazione mi garantisce l'esistenza di un ϵ e di una successione $(x_n)_{n=1,2,..}$ tale che $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ essendo $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$. Considero $\alpha = [x_n]$. Ho che $\alpha \sim x_0$ poiché per ogni reale positivo r, $|\alpha - x_0| < r$. Infatti, passando nel modello, ciò è equivalente al fatto che $X = \{n||x_n - x_0| < r\} \in \mathcal{U}$ per ogni r reale positivo. Ma ciò è ovvio poiché $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e quindi X è cofinito e sta in $\mathcal{U}$ che è un ultrafiltro non principale. Dunque per ipotesi ${}^\star f(\alpha) \sim f(x_0)$ ovvero per ogni r reale positivo $Y = \{n||f(x_n) - f(x_0)| < r\} \in \mathcal{U}$. Ciò d'altra parte è assurdo scegliendo $r = \epsilon$: in tal caso $Y = \emptyset \notin \mathcal{U}$ e dunque ho ottenuto l'assurdo.

Esercizio 3: *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. f è uniformemente continua se e solo se $\forall\alpha \sim \beta$, con α e β in ${}^\star\mathbb{R}$, ${}^\star f(\alpha) \sim {}^\star f(\beta)$.*

Dimostrazione: Mostro che l'uniforme continuità in senso classico implica quella non-standard.

Per ipotesi ho $\forall\epsilon\exists\delta|\forall|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Se $\alpha \sim \beta$, allora, nel modello, $\alpha = [v]$ e $\beta = [w]$ per due $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. L'ipotesi si traduce nel fatto che per ogni δ reale positivo, $|\alpha - \beta| < \delta$, ovvero nel modello $X = \{n||v(n) - w(n)| < \delta\} \in \mathcal{U}$. Fisso un certo ϵ e scelgo il δ dell'uniforme continuità. Allora $Y = \{n|f(v(n)) - f(w(n))| < \epsilon\} \supseteq X$, per l'uniforme continuità, e dunque $Y \in \mathcal{U}$. Valendo ciò per ogni ϵ, ciò significa che ${}^\star f(\alpha) \sim {}^\star f(\beta)$ che è ciò che si voleva.

Mostro che l'uniforme continuità non-standard implica quella in senso classico, per assurdo. La negazione mi garantisce l'esistenza di un ϵ tale che esistono due successioni $(x_n)_{n=1,2,...}$ e $(y_n)_{n=1,2,...}$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. E' chiaro, con ragionamenti del tutto analoghi alla continuità che se $\alpha = [x_n]$ e $\beta = [y_n]$ allora $\alpha \sim \beta$ ma ${}^\star f(\alpha)$ non è equivalente a ${}^\star f(\beta)$ poiché $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$.

Mostrerò, come esercizio per le definizioni date il teorema di Weirestrass con l'analisi non-standard.

Teorema 1: *(Weierstrass) Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua. Mostrare che* f *ammette massimo su* $[a, b]$.

Dimostrazione: Considero $^\star f : {}^\star[a, b] \to {}^\star\mathbb{R}$. E' semplice mostrare che $^\star X = {}^\star\{f(x)|x \in [a, b]\} = \{{}^\star f(\alpha)|\alpha \in {}^\star[a, b]\}$. Mostro che esiste un β in $^\star X$ tale che st(β)=sup X. Ciò è ovvio poiché mi basta considerare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un $x_n \in X$ tale che $|\sup X - x_n| < \frac{1}{n}$ (questo certamente esiste per la proprietà di sup). Allora sia $\beta = [x_n]$, usando il modello visto a lezione. Si ha che $|\beta - \sup X| < r$ per ogni r reale positivo poiché ciò equivale al fatto che $Y = \{n||\sup X - x_n| < r\} \in \mathcal{U}$ e ciò è vero essendo Y cofinito per ogni r per come è stata scelta la successione. Dunque effettivamente st(β)=sup X. Inoltre, vista l'ugaglianza fra insiemi detta all'inizio, esiste un certo $\alpha \in {}^\star[a, b]$ tale che $^\star f(\alpha) = \beta$. Sia s =st(α). Certamente, visto che α appartiene a un iperintervallo chiuso, allora $s \in [a, b]$ (visto a lezione). Inoltre per continuità, ho che $\alpha \sim s \Rightarrow {}^\star f(\alpha) = \beta \sim f(s)$. Ma β, per come era stato costruito, aveva parte standard $\sup X$, dunque $\beta \sim \sup X$. Essendo la parte standard unica, allora $f(s) = \sup X$, ovvero ho mostrato che esiste un $s \in [a, b]$ tale che $f(s) = \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$ che è esattamente quanto volevo, ovvero l'esistenza di un massimo.