Esercizi lezione 10/3/15, Andrea Vaccaro

16 marzo 2015

Proposizione 0.1. *Verificare (nei casi in cui ha senso):*

i) $st(\xi + \eta) = st(\xi) + st(\eta)$

ii) $st(\xi\eta) = st(\xi)st(\eta)$

iii) $st(\frac{\xi}{\eta}) = \frac{st(\xi)}{st(\eta)}$

Dimostrazione. i. In questo caso la formula ha senso ogni volta che ξ ed η non siano infiniti con segno opposto. Se i 2 valori sono infiniti con lo stesso segno, anche la loro somma sarà un infinito col medesimo segno ($\xi + \eta > \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), perciò ovviamente l'uguaglianza vale.

Se uno dei 2, diciamo η, è un infinitesimo, allora $st(\eta) = 0$, e in effetti se ξ è infinito, allora anche $\xi + \eta$ lo è (se non lo fosse, allora esisterebbe $r \in \mathbb{R}$ tale che $\xi < r - \eta < r + 1$, contro il fatto che ξ è infinito), e dello stesso segno, perciò $st(\xi + \eta) = st(\xi)$. Se ξ è finito allora $\xi \sim (\xi + \eta)$. Ma allora $st(\xi) \sim \xi \sim (\xi + \eta) \sim st(\xi + \eta)$, e poiché il primo e ultimo termine sono reali, questi sono uguali.

Se infine ξ ed η sono finiti ma non infinitesimi $\xi + \eta = st(\xi) + \epsilon + st(\eta) + \delta$ con ϵ e δ infinitesimi e $st(\xi)$ e $st(\eta)$ reali, perciò per i casi precedenti $st(\xi + \eta) = st(st(\xi) + st(\eta)) + st(\epsilon + \delta) = st(\xi) + st(\eta)$.

ii. In questo caso ha senso dimostrare l'uguaglianza in ogni caso escluso quello in cui ξ sia infinito ed η infinitesimo.

Se ξ ed η sono infiniti dello stesso segno, allora anche $\xi\eta$ sarà un infinito del medesimo segno ($\xi\eta > \sqrt{n}\sqrt{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), dunque l'uguaglianza è verificata, se sono di segno opposto, allora $\xi\eta$ avrà segno meno, e di nuovo l'uguaglianza è verificata.

Se ξ è finito (ma non infinitesimo) ed η è infinito, $\xi\eta$ sarà un infinito (per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\eta > \frac{n}{\xi}$) con segno determinato dal prodotto dei segni di η e ξ, e quindi anche in questo caso l'uguaglianza vale.

Se ξ è finito ed η è un infinitesimo, allora il prodotto dei 2 è infinitesimo; se infatti esistesse n tale che $\frac{1}{n} < \xi\eta$, allora $\xi > \frac{1}{n}\frac{1}{\eta}$, che sarebbe un infinito. Abbiamo quindi mostrato che $st(\xi\eta) = 0 = st(\xi) * 0 = st(\xi)st(\eta)$.

Se ξ ed η sono finiti, allora $\xi\eta = (st(\xi) + \epsilon)(st(\eta) + \delta)$ con ϵ e δ infinitesimi. Per i casi precedenti ed i vale allora che $st(\xi\eta) = st((st(\xi) + \epsilon)(st(\eta) + \delta)) = st(\xi)st(\eta) + st(\xi\delta) + st(\eta\epsilon) + st(\epsilon\delta)$ e tutti gli addendi eccetto il primo sono nulli.

iii. In quest'ultimo caso escludiamo le situazioni in cui ξ ed η siano entrambi infiniti o entrambi infinitesimi (e ovviamente il caso $\eta = 0$).

Se η è un infinitesimo, allora $st(\eta) = 0$ perciò $\frac{st(\xi)}{st(\eta)} = \pm\infty$, e in effetti poiché sto considerando solo ξ finito o infinito, e visto che $\frac{1}{\eta}$ è un infinito, si ottiene che $\frac{\xi}{\eta}$ è un infinito (punto *ii*) il cui segno si ottiene tramite la regola dei segni, perciò l'uguaglianza vale.

Se η è infinito allora $\frac{1}{\eta}$ è un infinitesimo, dunque anche $\frac{\xi}{\eta}$ è infinitesimo (punto *ii*), e dal momento che $\frac{st(\xi)}{st(\eta)} = \frac{st(\xi)}{\pm\infty} = 0$ l'uguaglianza vale.

Se η è finito e ξ è infinito o infinitesimo, anche $\frac{st(\xi)}{\eta}$ resta tale (infinito o infinitesimo), e l'uguaglianza segue banalmente.

Siano infine ξ ed η finiti e non infinitesimi, si ha allora che $\frac{\xi}{\eta} = \frac{st(\xi)+\epsilon}{st(\eta)+\delta}$ con ϵ e δ infinitesimi. Ma allora si ottiene che (per i punti precedenti) $st(\frac{\xi}{\eta}) = st(\frac{st(\xi)+\epsilon}{st(\eta)+\delta}) = st(\frac{st(\xi)}{st(\eta)+\delta}) + st(\frac{\epsilon}{st(\eta)+\delta})$ dove sappiamo che l'ultimo addendo è nullo. Se ora facciamo $\frac{st(\xi)}{st(\eta)} - \frac{st(\xi)}{st(\eta)+\delta} = \frac{st(\xi)\delta}{st(\eta)(st(\eta)+\delta)}$ che è un infinitesimo, perciò $st(\frac{\xi}{\eta}) = \frac{st(\xi)}{st(\eta)}$. $\square$

Proposizione 0.2. *Verifcare le seguenti uguaglianze:*

i) $^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$

ii) $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$

iii) $^*(A \setminus B) = {}^*A \setminus {}^*B$

Dimostrazione. i. Vale chiaramente che se l'immagine di $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è contenuta in $A \cap B$, allora è sia contenuta in A che in B, perciò: $^*(A \cap B) = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to A \cap B\} \subseteq \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to A\} \cap \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to B\} = {}^*A \cap {}^*B$. Se $^*A \cap {}^*B = \emptyset$ segue la tesi. In caso contrario se $[\sigma] \in {}^*A \cap {}^*B$, allora la classe ha un rappresentante σ con immagine in A e uno σ' con immagine in B. I due rappresentanti sono uguali su un elemento $C \in U$ a valori in $A \cap B$, definisco allora σ'' definita come σ in C, e con un valore costante in $A \cap B$ (che esiste altrimenti varrebbe $^*A \cap {}^*B = \emptyset$) altrove. Ovviamente $\sigma \equiv_U \sigma''$, e segue che $[\sigma] = [\sigma''] \in {}^*(A \cap B)$.

ii. Sia $[\sigma] \in {}^*(A \cup B)$, divido allora $\mathbb{N}$ in C_1 e C_2, rispettivamente insieme dei valori per cui $\sigma(n) \in A$ e per cui $\sigma(n) \in B$, definendo una partizione, uno dei 2 insiemi deve stare in U, supponendo sia C_1, definisco σ' come σ su C_1 e a valore costante in A (non vuoto in questo caso) altrove. Essendo le due funzioni uguali su un elemento di U sono nella medesima classe, che dunque sarà in $^*A$.

Viceversa se una classe ha un rappresentante la cui immagine è contenuta in A o in B, allora tale rappresentante avrà immagine contenuta in $A \cup B$, e segue la tesi.

iii. Sia $[\sigma] \in {}^*(A \setminus B)$, c'è allora un suo rappresentante σ tale che $Im(\sigma) \subseteq A \setminus B$, quindi certamente vale $Im(\sigma) \subseteq A$ e dunque $[\sigma] \in {}^*A$; vale inoltre che $Im(\sigma) \subseteq B^c$. Per il punto i si ha che $^*B \cap {}^*B^c = \emptyset$, perciò visto che $[\sigma] \in {}^*B^c$, si ottiene che $^*(A \setminus B) \subseteq {}^*A \setminus {}^*B$.

Viceversa, sia $[\sigma] \in {}^*A \setminus {}^*B$; si può dunque trovare un σ nella classe con immagine contenuta in A. Definiamo ora una partizione di $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$, dove nel primo insieme mettiamo gli n tali che $\sigma(n) \in B$, nel secondo quelli tali per cui $\sigma(n) \in B^c$. Almeno uno dei due deve stare in U (poiché ultrafiltro), ma se fosse $C_1 \in U$, potrei facilmente costruire una σ' a valori in B uguale a σ su C_1, contro le ipotesi che $[\sigma] \notin {}^*B$. Ma allora deve essere $C_2 \in U$, perciò riesco a costruire σ'' uguale a σ su C_2 e a valore costante in $A \setminus B$ altrove ($A \setminus B$ non vuoto poiché $C_2 \in U$ non vuoto) e quindi si ricava $[\sigma] = [\sigma''] \in {}^*(A \setminus B)$. □

Proposizione 0.3. *Verificare che:*

i) f è continua in x_0 se e solo se per ogni $\xi \sim x_0$ si ha ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$

ii) f è uniformemente continua se e solo se per ogni $\xi \sim \eta$ allora ${}^*f(\xi) \sim^* f(\eta)$

Dimostrazione. i. Sia f continua in x_0, e sia $\xi \sim x_0$. Supponiamo ${}^*f(\xi) > f(x_0)$, mostriamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha ${}^*f(\xi) - f(x_0) < \frac{1}{n}$. Poiché f è continua in x_0, esiste un δ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n}$ con δ numero reale. Posso allora trovare un $A \in U$ tale che per ogni $m \in A$ si abbia $\xi(m) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, stiamo cioè dicendo che la distanza fra x_0 e ξ è minore di δ. Ma allora per tali $m \in A$ si avrà che $|f(\xi(m)) - f(x_0)| < \frac{1}{n}$, abbiamo cioè mostrato che ${}^*f(\xi) - f(x_0) < \frac{1}{n}$.

Mostriamo ora il viceversa. Fissiamo $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$, e per assurdo valga che f non sia continua in x_0, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso trovare un y_n tale che $|x_0 - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_0) - f(y_n)| > \epsilon$. Considero allora la classe data dall'oggetto $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (per semplicità supponiamo di prendere $y_n > x_0$ senza perdere di generalità). Si verifica che $y \sim x_0$, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $\left\{m : y_m - x_0 < \frac{1}{n}\right\} \supseteq \{m : m \geq n\} \in U$ poiché cofinito. D'altra parte però si ha che $|f(x_0) - {}^*f(y)| > \epsilon$, assurdo per ipotesi.

ii. Sia f uniformemente continua, e consideriamo $\xi \sim \eta$ (sia $\xi < \eta$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un δ tale che se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$ per ogni x e y in $\mathbb{R}$. Poiché $\xi \sim \eta$ esiste $A \in U$ tale per cui se $m \in A$ allora $\eta(m) - \xi(m) < \delta$, ma allora su tale insieme vale anche che $|f(\eta(m)) - f(\xi(m))| < \frac{1}{n}$, abbiamo cioè mostrato che ${}^*f(\eta) \sim {}^*f(\xi)$.

Viceversa, se per assurdo f non fosse uniformemente continua, esisterebbe un $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$ tale per cui per ogni $n \in \mathbb{N}$, potrei trovare $x_n < y_n$ in $\mathbb{R}$ tali per cui $y_n - x_n < \frac{1}{n}$ e $|f(y_n) - f(x_n)| > \epsilon$. Ma allora considero i due elementi $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si verifica che $x \sim y$, infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\left\{m : y_m - x_m < \frac{1}{n}\right\}$ contiene $\{m : m \geq n\}$ che essendo cofinito è nell'ultrafiltro U. Si verifca però che $|{}^*f(y) - {}^*f(x)| > \epsilon$, il che è assurdo.

□

Proposizione 0.4. *Verificare che* $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall \nu$ *infinito* $a_\nu \sim l$.

Dimostrazione. Fissiamo ν infinito, e verifichiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale (supponendo $l > a_\nu$, l'altro caso sarà analogo) $l - a_\nu < \frac{1}{n}$. Sia M il naturale tale per cui se $m > M$ allora $|a_m - l| < \frac{1}{n}$. Sia $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un rappresentante di ν; vale allora che fissato M esiste un $A \in U$ tale per cui se $i \in A$ allora $\nu_i > M$. Ma allora, se $B \in U$ è l'insieme su cui si verifica $l > a_{\nu(n)}$, per $i \in A \cap B \in U$ si ottiene che $l - a_{\nu(i)} < \frac{1}{n}$ poiché $\nu_i > M$. Abbiam cioè verificato che $l - a_\nu < \frac{1}{n}$, e vista la genericità di n e ν, si ottiene la tesi.

Viceversa, supponiamo per assurdo esista un $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esista un $n_k > k$ tale che $|l - a_{n_k}| > \epsilon$. Se considero ora la classe di $\nu = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ottengo un infinito (come al solito $\{k : n_k > h\}$ per un certo $h \in \mathbb{N}$ contiene il cofinito $\{k : k \geq h\}$). Supponiamo valga $l > a_\nu$; sull'insieme $B \in U$ testimone di questa relazione, si avrà $l - a_{\nu(k)} = l - a_{n_k} > \epsilon$, ma allora viene contraddetta l'ipotesi $l \sim a_\nu$ poiché $l - a_\nu > \epsilon > \frac{1}{h}$ per un opportunamente grande $h \in \mathbb{N}$. $\square$