Esercizi lezione 9/3/15, Andrea Vaccaro

13 marzo 2015

Proposizione 0.1. *Se F è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X allora esiste $F_0 \subseteq F$ finita tale che F_0 è r-regolare su X.*

Mostrare che il precedente enunciato è equivalente al teorema di compattezza combinatoria.

Dimostrazione. Supponiamo valga il teorema di compattezza combinatoria e sia F una famiglia di insiemi come nell'ipotesi, sia Y l'insieme finito fornito da tale teorema. Per ogni r-partizione di Y vi è un elemento di F monocromatico rispetto alla partizione stessa. Definisco allora $F_0 = \{A \in F : A \text{ monocromatico rispetto a una r-partizione di } Y\}$. Notando che F_0 è costituito da sottoinsiemi di Y che è finito, si osserva facilmente che F_0 è finito. Sia ora una r-partizione di $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$; questa indurrà una r-partizione su $Y = C_1' \sqcup \cdots \sqcup C_r'$. Grazie al teorema di compattezza combinatoria trovo un $A \subseteq C_i'$ per un certo i in F, ma per costruzione tale A è anche in F_0, inoltre $A \subseteq C_i$, dunque F_0 è r-regolare su X.

Vediamo ora il viceversa. Sia di nuovo F come prima, ed F_0 fornitami dall'enunciato. Definisco $Y = \bigcup F_0$, è un insieme finito poiché unione finita di insiemi finiti. Diamo una r-partizione su $Y = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$; da questa costruiamo una r-partizione su $X = C_1' \sqcup \cdots \sqcup C_r'$ semplicemente ponendo $C_i' = C_i$ per $i \neq 1$ e $C_1' = C_1 \cup X \setminus Y$. Ora F_0 è regolare su X, perciò esiste un $A \in F_0$ contenuto in un certo C_i'. Se $i \neq 1$, allora $A \subseteq C_i$, se $i = 1$ in ogni caso A è contenuto nel C_1 originario, poiché contenuto in Y per costruzione. Abbiamo cioè mostrato che F_0 è r-regolare su Y, ma allora lo è anche F. □

Proposizione 0.2. *Sia $F \subseteq P(X)$ chiuso per soprainsiemi.*

i) F è wPR su X se e solo se esiste un ultrafiltro U su X tale che $U \subseteq F$

ii) F è PR su X se e solo se è unione di ultrafiltri su X

Dimostrazione. i. Supponiamo vi sia un ultrafiltro U tale che $U \subseteq F$. Sia ora $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r \in U$, vale perciò $C_i \in U$ per un certo i. Ma allora $C_i \in F$, che dunque è wRP su X.

Sia ora F wPR su X, e per assurdo valga che nessun ultrafiltro U su X sia contenuto in F. Questo significa che per ogni ultrafiltro U posso trovare un insieme $A_U \in U$ tale che $A_U \notin F$. Ma poiché F è wPR e $X = A_U \sqcup A_U^c$, allora per ogni ultrafiltro U si ha $A_U^c \in F$. Notiamo che $V = \{A_U^c : U \text{ ultrafiltro}\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Se infatti vi fossero finiti $A_{U_i}^c$ tali che $\bigcap A_{U_i}^c = \emptyset$, allora $\bigcup A_{U_i} = X$, e da questi potrei ricavare una partizione fatta con dei loro sottoinsiemi, e dunque almeno uno di loro dovrebbe essere in F (che è chiusa verso l'alto). Perciò posso costruire un ultrafiltro che estende V, che chiameremo W. Ma allora, se considero A_W e A_W^c, questi dovrebbero essere entrambi in W, assurdo.

ii. Sia F unione di ultrafiltri $\bigcup U_i$ e sia $X \in F$, in particolare X sarà in un U_i. Ma allora se $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, vi sarà un $C_j \in U_i$, e dunque in F, che perciò è regolare.

Viceversa, poiché F è chiusa verso l'alto, allora $X \in F$, e perciò se F è PR, è anche wPR. Consideriamo allora $\bigcup U_i$ dove U_i sono gli ultrafiltri contenuti in F (almeno uno c'è per il punto precedente). Supponiamo esista $A \in F \setminus \bigcup U_i$. Consideriamo i V_j, tutti gli ultrafiltri che contengono A; per ipoetsi assurda nessuno di questi è contenuto in F, esiste cioè per ogni j un $W_j \in V_j$ e non in F. Poiché questi ultrafiltri contengono A, $A \cap W_j \neq \emptyset$; se chiamiamo $C_j = (W_j \cap A)^c$, si avrà che anche $A \cap C_j \neq \emptyset$, poiché in caso contrario $A \subseteq W_j$, e quindi si avrebbe $W_j \in F$ perché F chiusa verso l'alto. Dal momento che $C_j \sqcup (W_j \cap A) = A$ ed F è PR, allora $C_j \in F$ per ogni V_j. Di nuovo, i C_j godono della proprietà dell'intersezione finita: nel caso in cui si avesse $C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_r} = \emptyset$, allora $(W_{i_1} \cap A) \cup \cdots \cup (W_{i_r} \cap A) = A$. Posso allora ricavare una partizione di A di sottoinsiemi dei W_{i_j}, e poiché F è PR, uno di questi sarebbe in F, assurdo. Ma allora esiste un ultrafiltro U contenente i C_i. Poiché ognuno di questi è sottoinsieme di A, anche A sarà in U. Ma se allora consideriamo il W_U e il corrispettivo C_U otteniamo due insiemi con intersezione nulla nello stesso ultrafiltro. Assurdo. $\square$

Teorema 0.3. *Sia $f : X \to X$ senza punti fissi. Mostrare che esiste una partizione $X = C_0 \sqcup C_1 \sqcup C_2$ tale che per ogni $x \in X$ allora x e $f(x)$ hanno colori diversi.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi non valga, ovvero che $F = \{\{x, f(x)\} : x \in X\}$ sia 3-regolare su X. Per il teorema di compattezza combinatoria, esiste allora $F_0 \subseteq F$ finita 3-regolare su X. Mostriamo allora che $F_0 = \{\{x_1, f(x_1)\}, \cdots, \{x_m, f(x_m)\}\}$ non può essere 3-regolare. Da qui in avanti considereremo la notazione $f^n(x)$ dove $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$ e $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Partendo da x_1, consideriamo $f(x_1)$; se esiste $1 \neq j \leq n$ tale che $f(x_1) = x_j$, allora andiamo a considerare $f^2(x_1)$, e andiamo avanti così fin quando $f^{k+1}(x_1) \neq x_i$ per ogni $i \leq n$ oppure non appena $f^{k+1}(x_1) = x_i$ che sia già comparso nella successione. La f non ha punti fissi, dunque escluso l'ultimo passo, non abbiamo ripetizione di elementi.

A questo punto coloriamo la successione $f^i(x_1)$, che può terminare in 2 modi (dal momento che F_0 è finito son sicuro di fermarmi a un certo punto): se $f^{k+1}(x_1) \neq x_i$ per ogni $i \leq n$, allora partendo da x_1, coloriamo gli elementi in modo alternato con C_1 e C_2 (x_1 con C_1, $f(x_1)$ con C_2, ecc). Se invece $f^{k+1} = x_i = f^l(x_1)$ con $l \leq k$, coloriamo $f^l(x_1)$ con C_3, e in modo alternato con C_1 e C_2 i suoi successori ($f^{l+1}(x_1)$ con C_1, $f^{l+2}(x_1)$ con C_2, ecc) fino a tornare a lui stesso (che non viene ovviamente ricolorato), e similmente i suoi predecessori fino a x_1 ($f^{l-1}(x_1)$ con C_1, $f^{l-2}(x_1)$ con C_2, ecc). Chiaramente per la successione considerata non esiste x tale che lui stesso ed $f(x)$ abbiano lo stesso colore.

Se restano ancora coppie $\{x_j, f(x_j)\}$ per cui x_n non sia stato preso nella costruzione precedente, ripetiamo il procedimento sopra descritto a partire da x_n, con un'unica attenzione: ci fermiamo non appena vengono descritte le situazioni definite sopra, oppure non appena $f^n(x_j) = x_i$ dove x_i sia già colorato (e dunque già considerato nelle costruzioni precedenti) (similmente ci si fermerà e varrà la colorazione esposta qui di seguito se $f^n(x_j) = f(x_i)$ già colorato). Se x_i è colorato con C_3, allora mi limito a colorare $f^h(x_j)$ a colori alternati fra C_1 e C_2 per $h \leq n$ (x_j con C_1, $f(x_j)$ con C_2, ecc). Se invece x_i è di colore C_l con $l = 1, 2$, comincio a colorare la successione all'indietro (fino ad x_j) da $f^{n-1}(x_j)$ a colori alternati fra C_1 e C_2 scegliendoli in modo che l'alternanza venga rispettata anche con $f^n(x_j)$ (ad esempio, se x_i è C_1, allora avrò $f^{n-1}(x_j)$ colorato con C_2, $f^{n-2}(x_j)$ con C_1 e così via). Di nuovo, con questa costruzione, x e $f(x)$ mantengono colori distinti.

In questo modo posso definire una partizione su $X = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ dove tutti gli elementi x tali che $\{x, f(x)\} \in F_0$ vengono messi nell'insieme col nome del colore a loro assegnato, tutti gli altri elementi li possiamo mettere in C_1. Si verifica che F_0 non è regolare rispetto a questa partizione: se $\{x, f(x)\} \in F_0$, allora x verrà pescato in una delle successioni della costruzione sopra descritta, quindi per costruzione i colori di x e di $f(x)$ sono distinti. $\square$

Proposizione 0.4. *Verificare che in ${}^*\mathbb{R}$ valgono gli assiomi di campo.*

Dimostrazione. Cominciamo verificando che $[\sigma] + [\tau] = [\sigma + \tau]$ è ben definita. Sia $\sigma' \in [\sigma]$ e $\tau' \in [\tau]$, vale dunque che $A = \{n : \sigma(n) = \sigma'(n)\} \cap \{n : \tau(n) = \tau'(n)\} \in U$. Si verifica ovviamente che $\{n : \sigma(n) + \tau(n) = \sigma'(n) + \tau'(n)\} \supseteq A \in U$, perciò vale che $\sigma' + \tau' \in [\sigma + \tau]$.

La dimostrazione può essere ripetuta in modo identico per la moltiplicazione sostituendo $*$ a $+$.

Ogni elemento ammette un opposto per la somma, infatti data $[a]$, allora $-[a] = [-a]$, poiché $[a] + [-a] = [a - a] = [0]$, e quest'ultimo è ovviamente l'elemento neutro, poiché $[a] + [0] = [a + 0] = [a]$.

Mostriamo proprietà associativa e commutativa della somma (per il prodotto è la dimostrazione è identica).

$[a] + ([b] + [c]) = [a] + [b + c] = [a + (b + c)] = [(a + b) + c] = ([a] + [b]) + [c]$.

$[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]$.

Verifichiamo la distributività.

$[a]\,([b] + [c]) = [a]\,[b + c] = [a(b + c)] = [ab + ac] = [ab] + [ac] = [a]\,[b] + [a]\,[c]$

L'elemento neutro per il prodotto è la funzione costantemente 1 infatti $[a]\,[1] = [a * 1] = [a]$.

Sia ora $[\sigma]$ una classe non nulla in${}^*\mathbb{R}$. Questo significa che $\{n : \sigma(n) = 0\} \notin U$, ma poiché U è ultrafiltro, si verifica che $A = \{n : \sigma(n) = 0\}^c = \{n : \sigma(n) \neq 0\} \in U$. Definisco allora la funzione $\tau(n) = \sigma(n)^{-1}$ se $n \in A$, 1 altrimenti. A questo punto se faccio $[\sigma]\,[\tau] = [\sigma\tau] = [1]$, dove l'ultima uguaglianza vale poiché $\{n : \sigma(n)\tau(n) = 1\} \supseteq A \in U$. $\square$

Proposizione 0.5. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

i) *$\mathbb{F}$ è archimedeo*

ii) *$\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$*

iii) *$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$*

iv) *non esistono infinitesimi non nulli*

Dimostrazione. $i) \Rightarrow ii)$.

Supponiamo $\alpha > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora non esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che per $\epsilon = 1$ si abbia $m = m\epsilon > \alpha$, contro l'ipotesi.

$ii) \Rightarrow iii)$.

Siano $0 < x < y \in \mathbb{F}$ (il caso con x o y negativi è analogo). Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x < n < y$, allora abbiamo $n \in \mathbb{Q}$ fra x e y e abbiamo concluso. Valga allora $n < x < y < n+1$. Poiché $\mathbb{N}$ è illimitato, sia $m > \frac{1}{y-x}$, dunque $\frac{1}{m} < y-x$. Consideriamo i valori $n + \frac{i}{m}$ con $0 \leq i \leq m$. Supponiamo non esista i tale che $x < \frac{i}{m} < y$, ma allora se j è il più grande valore tale che $\frac{j}{m} < x$ si ha che $\frac{j+1}{m} - \frac{j}{m} > y - x > \frac{1}{m}$. Assurdo.

$iii) \Rightarrow iv)$.

Supponiamo esista un infinitesimo ϵ positivo; poiché $\mathbb{Q}$ è denso, trovo un elemento di $\mathbb{Q}$ fra ϵ e zero. Ma allora esiste $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < \frac{a}{b} < \epsilon$, dunque $\frac{1}{b} < \epsilon$. Assurdo.

$iv) \Rightarrow i)$.

Supponiamo esista un $\epsilon > 0$ tale che per ogni n si abbia $n\epsilon < 1$. Ma allora $\epsilon < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché ovviamente vale $-\frac{1}{n} < \epsilon$, questi sarebbe un infinitesimo. Assurdo. $\square$

Proposizione 0.6. *In ${}^*\mathbb{R}$ nessun insieme numerabile è limitato.*

Dimostrazione. Sia $\{A_1 < A_2 < \cdots\}$ un insieme numerabile. Fisso dei rappresentanti $a_i = (a_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ per gli A_i, e definisco $a = (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come segue: $a^n = 1 + \max_{i\leq n} a_i^n$. Consideriamo allora a_i: per $n \geq i$ si verifica che $a^n > a_i^n$, perciò $\{n \in \mathbb{N} : a^n > a_i^n\} \in U$ (è cofinito), e questo vale per ogni i. Dunque la classe di a, che chiameremo A, è tale per cui $A > A_i$ per ogni i, perciò l'insieme numerabile è limitato. □

Proposizione 0.7. *Considero il campo ordinato e non archimedeo* $^*\mathbb{Q}$. *Di questo, considero* $^*\mathbb{Q}_{fin} = \{\xi \in^* \mathbb{Q} : \xi$ *limitato*$\}$. *Sia* I *l'ideale massimale degli infinitesimi. Mostrare che* $\mathbb{F} = {}^*\mathbb{Q}_{fin} /_I \cong \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathbb{F}$ è ordinato. Induciamo su $\mathbb{F}$ l'ordine definito su $^*\mathbb{Q}_{fin}$. Dati $[x]_I \neq [y]_I$, diremo che $[x]_I < [y]_I$ se e solo se $x < y$. Siano $x' \in [x]_I$ e $y \in [y]_I$ e mostriamo che la relazione è ben definita. Sappiamo che $y - x > 0$ non è un infinitesimo. Ma allora $y' - x' = y' - y - (x' - x) + y - x > 0$ in quanto sommando a un valore che non è infinitesimo (come $y - x$) due infinitesimi, questo non può certamente cambiare segno. Cioè la validità della relazione non dipende dal rappresentante della classe scelto.

Valga $[x]_I < [y]_I$ e $[y]_I < [z]_I$, ma allora vale $x < z$ (per la proprietà transitiva della relazione d'ordine su $^*\mathbb{Q}_{fin}$) e quindi anche la relazione sul quoziente è transitiva.

Date poi 2 classi, scegliendo 2 rappresentanti questi saranno confrontabili, e dunque anche le classi, cioè la relazione sul quoziente è un ordine totale.

Che $\mathbb{F}$ sia un campo segue banalmente dal fatto che I è massimale.

Infine, vale che $\mathbb{Q}$ è immerso in $\mathbb{F}$, pensiamo alle successioni costanti in $^*\mathbb{Q}_{fin}$ che restano distinte quando vado a quozientare per I. Se riusciamo a mostrare che tutti gli insiemi limitati di tali oggetti ammettono unico *sup* a meno di infinitesimi, allora avremo immerso $\mathbb{R}$ in $\mathbb{F}$, giacchè basterà associare a ogni reale un insieme di razionali di cui lui sia il *sup*, a questo insieme associare il rispettivo insieme di successioni costanti in $\mathbb{F}$, e a lui il suo *sup*. Dalla costruzione sarà chiaro che questa corrispondenza preserverà sia ordine che operazioni. A questo punto, poiché abbiamo quozientato per gli infinitesimi, il campo non potrà che essere isomorfo a $\mathbb{R}$, poiché se lo estendesse propriamente sarebbe non archimedeo, e quindi ammetterebbe infinitesimi non nulli.

Sia allora $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ un insieme limitato di successioni costanti a valori in $\mathbb{Q}$ (positivi, il caso con valori negativi è analogo). Poniamo $a_i = (x_i)_{n\in\mathbb{N}}$, e definiamo in $^*\mathbb{Q}_{fin}$ l'elemento $a = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. È chiaro che a sia un maggiorante di A (per $j \geq i$ vale $a^j \geq a_i^j$). Supponiamo ora $b < a$; se $a - b$ è infinitesimo, allora non ci interessa, poiché quozientando viene assimilato nella classe di a. Supponiamo allora esista un $m \in \mathbb{N}$ tale che $a - b > \frac{1}{m}$. Considero allora la successione $a' = (x_i - \frac{1}{m})_{i\in\mathbb{N}}$; se ragiono in $\mathbb{Q}$ so che le successioni a e a' hanno entrambe limite (sono limitate e monotone), ma hanno limite distinto, esiste perciò un numero razionale q maggiore di tutti gli elementi di a' e minore di quasi tuti gli elementi di a. Se prendo allora la successione costantemente q (la chiamo ancora q), si verifica che $b < a - \frac{1}{m} < q < a_j$ per un j sufficientemente grande. Abbiamo cioè mostrato che a è effetivamente l'estremo superiore dell'insieme, quindi abbiamo concluso.

□