Esercizi del Corso “Ultrafiltri e Metodi Non Standard”

Federico Glaudo

12 marzo 2015

1 Regolarità per partizioni

Definizione 1.1. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X chiusa per sovrainsiemi.

Diremo che la famiglia $\mathcal{F}$ è regolare (per partizioni) su $Y \subseteq X$ se per ogni partizione $Y = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ esiste un indice i tale che $C_i \in \mathcal{F}$.

Inoltre la famiglia $\mathcal{F}$ è detta fortemente regolare (per partizioni) se è regolare su ogni insieme $Y \in \mathcal{F}$.

Infine la famiglia $\mathcal{F}$ è debolmente regolare (per partizioni) se è regolare su X.

Definizione 1.2. Fissata $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X chiusa per sovrainsiemi e debolmente regolare, definiamo la sua chiusura regolare $\hat{\mathcal{F}}$ come

$$\hat{\mathcal{F}} = \{Y \subseteq X : \mathcal{F} \text{ è regolare su } Y\} \ .$$

Lemma 1.3. *Fissata $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X chiusa per sovrainsiemi e debolmente regolare, la chiusura regolare $\hat{\mathcal{F}}$ è una sottofamiglia di $\mathcal{F}$ chiusa per sovrainsiemi e fortemente regolare.*

Dimostrazione. Il contenimento $\hat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ è ovvio poichè basta notare che se $F \in \hat{\mathcal{F}}$ allora la partizione banale di F (con il solo insieme F) deve avere un elemento contenuto in $\mathcal{F}$ e quindi $F \in \mathcal{F}$.

Per mostrare che $\hat{\mathcal{F}}$ è chiusa per sovrainsiemi, fissiamo $E \supseteq F \in \hat{\mathcal{F}}$ ed una partizione $E = C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Allora $F = (C_1 \cap F) \cup \cdots \cup (C_n \cap F)$ è una partizione di F e perciò esiste i tale che $C_i \cap F \in \mathcal{F}$. Ma $\mathcal{F}$ è chiusa per sovrainsiemi e quindi $C_i \in \mathcal{F}$. Considerata l'arbitrarietà della scelta della partizione di E, ciò dimostra che $\mathcal{F}$ è regolare su E e cioè $E \in \hat{\mathcal{F}}$, da cui si deduce la chiusura per sovrainsiemi di $\hat{\mathcal{F}}$.

Resta ora da verificare che $\hat{\mathcal{F}}$ sia fortemente regolare. Se per assurdo $\hat{F}$ non fosse fortemente regolare, esisterebbe $F \in \hat{\mathcal{F}}$ ed una partizione $F = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ tale che $C_i \notin \hat{\mathcal{F}}$ per ogni i. Allora $\mathcal{F}$ non sarebbe regolare su C_i e perciò avremmo una partizione $C_i = D_i^1 \cup \cdots \cup D_i^{a_i}$ tale che $D_i^j \notin \hat{\mathcal{F}}$ per ogni j. Questo mostra l'assurdo poiché la partizione $F = \bigcup_{ij} D_i^j$ sarebbe tale che nessuno dei suoi elementi appartiene a $\mathcal{F}$ e ciò negherebbe l'appartenenza di F a $\hat{\mathcal{F}}$. □

Nota 1.4. Vale $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ se e solo se $\mathcal{F}$ è fortemente regolare.

Proposizione 1.5. *Ogni famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X chiusa per sovrainsiemi e debolmente regolare contiene un ultrafiltro.*

Dimostrazione. L'idea è considerare una sottofamiglia "minimale" che continui ad essere chiusa per sovrainsiemi e debolmente regolare. Per assicurare l'esistenza di una tale sottofamiglia "minimale" sfrutteremo il lemma di Zorn e poi, basandoci sulla minimalità, mostreremo che abbiamo trovato proprio un ultrafiltro.

Consideriamo la famiglia $\mathscr{F}$ delle sottofamiglie di $\mathcal{F}$ chiuse per sovrainsiemi e debolmente regolari. Ovviamente $\mathcal{F} \in \mathscr{F}$. Su tale famiglia poniamo l'ordinamento dell'inclusione.

Fissata una catena $\{\mathcal{G}_i : i \in I\}$ di insiemi in $\mathscr{F}$, definiamo $\mathcal{G} = \cap_{i\in I}\mathcal{G}_i$. È evidente che $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ e che $\mathcal{G}$ è chiuso per sovrainsiemi, poiché è intersezione di famiglie chiuse per sovrainsiemi. Assumendo per assurdo che $\mathcal{G}$ non sia debolmente regolare si trova una partizione $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ tale che $C_i \notin \mathcal{G}$ per ogni i. Però, per definizione di catena, esiste un $\mathcal{G}_k$ tale $C_i \notin \mathcal{G}$ per ogni i e ciò è assurdo visto che $\mathcal{G}_k$ è debolmente regolare. Unendo quanto detto si ricava che $\mathcal{G} \in \mathscr{F}$ e quindi la catena considerata ammette $\mathcal{G}$ come minorante.

Visto che abbiamo verificato che ogni catena ha un minorante, per il lemma di Zorn, esiste $\mathcal{U} \in \mathscr{F}$ minimale rispetto all'inclusione. Nell'ordine dimostreremo che $\mathcal{U}$ è fortemente regolare, che non può accadere che sia un insieme sia il suo complementare stiano in $\mathcal{U}$ ed infine che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro.

Innanzitutto $\mathcal{U}$ è fortemente regolare, altrimenti la famiglia $\hat{\mathcal{U}}$, in virtù del Lemma 1.3, sarebbe strettamente contenuta in $\mathcal{U}$ violandone la minimalità.

Assumiamo per assurdo che esista $A \subseteq X$ non vuoto tale che A, $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$ e definiamo allora $\mathcal{U}'$ come

$$\mathcal{U}' = \{F \in \mathcal{U} : F \cap A \neq \emptyset\}.$$

È ovvio che $\mathcal{U}'$ è chiuso per sovrainsiemi, che è una sottofamiglia di $\mathcal{F}$ e che è strettamente contenuta in $\mathcal{U}$. Per mostrare che $\mathcal{U}'$ è debolmente regolare, data una generica partizione $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$, consideriamo la partizione $A = (C_1 \cap A) \cup \cdots (C_n \cap A)$ (scartando gli insiemi che risultano vuoti dopo l'intersezione). Visto che $A \in \mathcal{U}$ e che $\mathcal{U}$ è fortemente regolare ne deduciamo che esiste i tale che $C_i \cap A \in \mathcal{U}$. Ma allora, per definizione di $\mathcal{U}'$, di certo $C_i \cap A \in \mathcal{U}'$ e, visto che $\mathcal{U}'$ è chiuso per sovrainsiemi, ne segue $C_i \in \mathcal{U}'$ mostrando che $\mathcal{U}'$ è debolmente regolare come cercato. Unendo quanto detto è evidente che $\mathcal{U}' \in \mathscr{F}$ e che $\mathcal{U}' \subsetneq \mathcal{U}$ e ciò mostra l'assurdo.

Se dimostriamo che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro abbiamo concluso. Ovviamente $\mathcal{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Dato $A \subseteq X$, se $A \notin \mathcal{U}$, considerando la partizione $X = A \cup A^{\mathsf{c}}$ ed essendo $\mathcal{U}$ debolmente regolare, si deduce $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U}$. Per mostrare che è un ultrafiltro resta solo da verificare che è chiuso per intersezioni. Dati A, $B \in \mathcal{U}$, consideriamo la partizione $X = (A \cap B) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}}) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}})$. Visto che $\mathcal{U}$ è debolmente regolare, almeno uno degli elementi della partizione deve appartenere ad $\mathcal{U}$. Ma, per quanto detto in precedenza, vale A^{c}, $B^{\mathsf{c}} \notin \mathcal{U}$ e ciò, unito alla chiusura di $\mathcal{U}$ per sovrainsiemi, implica che l'unica possibilità sia proprio $A \cap B \in \mathcal{U}$. □

Teorema 1.6 (Equivalenza della debole regolarità)**.** *Fissata una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X chiusa per sovrainsiemi, la famiglia $\mathcal{F}$ è debolmente regolare se e solo se contiene un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Una freccia dell'equivalenza è il contenuto della Proposizione 1.5. La freccia opposta è banale notando che un ultrafiltro è debolmente (ma anche fortemente) regolare e che la debole regolarità si mantiene passando ad una famiglia più grande. □

Teorema 1.7 (Equivalenza della forte regolarità). *Fissata una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X chiusa per sovrainsiemi, la famiglia $\mathcal{F}$ è fortemente regolare se e solo se è un'unione di ultrafiltri.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ è un'unione di ultrafiltri, scegliamo arbitrariamente $F \in \mathcal{F}$ e una sua partizione $F = C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Allora esiste un ultrafiltro $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ tale che $F \in \mathcal{U}$ e quindi, per le proprietà di ultrafiltro, esiste un indice i tale che $C_i \in \mathcal{U}$. Questo implica $C_i \in \mathcal{F}$ e ciò mostra che $\mathcal{F}$ è fortemente regolare.

Per l'implicazione opposta sia $\mathcal{F}$ fortemente regolare. Dato $F \in \mathcal{F}$ vogliamo mostrare che esiste un ultrafiltro contenuto in $\mathcal{F}$ che contiene F, ciò è ovviamente sufficiente a dedurne che $\mathcal{F}$ è un'unione di ultrafiltri. Definiamo $\mathcal{F}_F$ la sottofamiglia di $\mathcal{F}$ contenente solo gli insiemi contenuti in F. Considerando $\mathcal{F}_F$ come una famiglia di sottoinsiemi di F, è banale verificare che dall'ipotesi di forte regolarità di $\mathcal{F}$ segue che $\mathcal{F}_F$ è debolmente (anche fortemente) regolare. Allora per il Teorema 1.6 (Equivalenza della debole regolarità) esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}_F$ su F contenuto in $\mathcal{F}_F$. Notiamo innanzitutto che $F \in \mathcal{U}_F$. A questo punto estendiamo $\mathcal{U}_F$ ad un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su tutto X definito come

$$\mathcal{U} = \{A \in X : A \text{ contiene un elemento di } \mathcal{U}_F\} .$$

Il fatto che $\mathcal{U}$ sia esso stesso un ultrafiltro su X è una facile verifica usando che $\mathcal{U}_F$ lo è su F. Visto che $\mathcal{F}$ è chiusa per sovrainsiemi, valgono i contenimenti $\mathcal{U}_F \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ e perciò l'ultrafiltro $\mathcal{U}$ rispetta tutte le richieste. □