Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 9-10/3/15

Definizione 0.1. *Una famiglia non vuota $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice PR (Partition Regular) su X se per ogni partizione finita di un elemento di $\mathcal{A}$ almeno una delle parti appartiene ad $\mathcal{A}$.*

Definizione 0.2. *Una famiglia non vuota $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice wPR (weakly Partition Regular) su X se per ogni partizione finita di X almeno una delle parti appartiene ad $\mathcal{A}$.*

Esercizio 0.1. *Data una famiglia non vuota $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X che sia chiusa per sovrainsieme (cioè $A \in \mathcal{A}$ e $B \supseteq A$ implica $B \in \mathcal{A}$) vale:*

$$\mathcal{A} \text{ è PR su } X \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ è un'unione di ultrafiltri su } X$$

Dimostrazione.
($\Leftarrow$) Ogni ultrafiltro su X è PR su X: infatti data una partizione finita di un elemento dell'ultrafiltro, per definizione di ultrafiltro c'è esattamente una parte che appartiene all'ultrafiltro.
Un'unione di famiglie PR su X è ancora PR su X: infatti se prendo un elemento dell'unione di alcune famiglie PR su X, questo elemento deve stare in almeno una delle famiglie, e data una qualunque partizione finita di esso, almeno una delle parti sta nella stessa famiglia in cui stava l'elemento (e quindi anche nell'unione delle famiglie).
Quindi un'unione di ultrafiltri è PR su X in quanto unione di famiglie PR su X.
($\Rightarrow$) Dato un qualsiasi elemento $\bar{A} \in \mathcal{A}$, voglio costruire un ultrafiltro $\mathcal{U}_{\bar{A}}$ contenuto in $\mathcal{A}$ e che contenga $\bar{A}$: così avrei $\mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{U}_A$.
Applico il lemma di Zorn all'insieme S dei filtri contenuti in $\mathcal{A}$ e che contengono $\bar{A}$ ordinati per inclusione: tale insieme è non vuoto in quanto contiene il filtro formato da tutti i sottoinsiemi di X che includono $\bar{A}$. Ogni catena ammette un maggiorante, ovvero l'unione degli elementi della catena: è facile verificare che un'unione di filtri uno incluso nell'altro è ancora un filtro, e un'unione di sottoinsiemi di $\mathcal{A}$ è ancora un sottoinsieme di $\mathcal{A}$.
Consideriamo dunque un elemento massimale $\mathcal{U}$ e supponiamo per assurdo che non sia un ultrafiltro: esiste un sottoinsieme B di X tale che nè B nè B^c stanno in $\mathcal{U}$. Considero i due seguenti filtri, ottenuti aggiungendo ad $\mathcal{U}$ B o B^c rispettivamente: $\mathcal{F}_1 := \{P \subseteq X : \exists U \in \mathcal{U} \quad P \supseteq B \cap U\}$ e $\mathcal{F}_2 := \{P \subseteq X : \exists U \in \mathcal{U} \quad P \supseteq B^c \cap U\}$. Per massimalità di $\mathcal{U}$, nessuno di questi due filtri può essere sottoinsieme di $\mathcal{A}$: esistono $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tali che $B \cap U_1, B^c \cap U_2 \notin \mathcal{A}$, e dunque $A = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ si partiziona in

$(A \cap B) \sqcup (A \cap B^c)$ che non stanno in $\mathcal{A}$, contraddicendo la regolarità per partizioni di $\mathcal{A}$. Quindi $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro.
Dunque $\mathcal{A}$ risulta essere un'unione di ultrafiltri. $\square$

Esercizio 0.2. *Data una famiglia non vuota $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X chiusa per sovrainsieme vale:*

$$\mathcal{A} \text{ è wPR su } X \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ contiene almeno un ultrafiltro } \mathcal{U} \text{ su } X$$

Dimostrazione.
($\Leftarrow$) Ovvia.
($\Rightarrow$) Definisco per ricorsione le seguenti famiglie di sottoinsiemi di X:

- $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}_{n+1} := \{A \in \mathcal{A}_n : \mathcal{A}_n \cap \mathcal{P}(A) \text{ è wPR su } A\}$

  In pratica un elemento A di $\mathcal{A}_n$ lo tengo dentro $\mathcal{A}_{n+1}$ se per ogni partizione finita di A c'è una parte che sta in $\mathcal{A}_n$
- $\mathcal{A}_\omega := \bigcap_{n \in \omega} \mathcal{A}_n$

Dimostro ora che $\mathcal{A}_\omega$ è non vuoto e PR su X. In questo modo poi avrò, per l'esercizio precedente, che $\mathcal{A}_\omega$ contiene almeno un ultrafiltro, da cui la tesi.
Innanzitutto $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$ per definizione. Inoltre dire che $A \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n+1}$ equivale a dire che esiste una partizione finita di A tale che nessuna parte sta in $\mathcal{A}_n$.
Si verifica facilmente per induzione che $\mathcal{A}_n$ è wPR su X per ogni n. Se ad esempio $\mathcal{A}_1$ non fosse wPR su X, esisterebbe una partizione finita tale che nessuna delle parti sta in $\mathcal{A}_1$. Potrei allora costruire un'altra partizione finita di X in questo modo: le parti che non stanno in $\mathcal{A}_0$ le lascio invariate, le parti che stanno in $\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_1$ le partiziono a loro volta ciascuna in un numero finito di parti in modo che nessuna delle parti stia in $\mathcal{A}_0$. Quindi avrei trovato una nuova partizione finita di X tale che nessuna delle parti sta in A_0, che è assurdo.
Si ha dunque che $\mathcal{A}_\omega$ è wPR su X (e quindi anche non vuoto): data una partizione finita di X, per ogni n c'è almeno una parte che sta in $\mathcal{A}_n$; visto che il numero di parti è finito, almeno una parte sta in $\mathcal{A}_n$ per infiniti indici n, e visto che gli $\mathcal{A}_n$ sono inclusi uno nell'altro, tale parte sta in tutti gli $\mathcal{A}_n$, quindi anche nella loro intersezione.
Dimostriamo infine che A_ω è PR su X: sia dato un insieme $A \in \mathcal{A}_\omega$ ed una sua partizione finita: dal momento che $A \in \mathcal{A}_\omega$, si ha che per ogni n vale $A \in \mathcal{A}_{n+1}$, dunque almeno una delle parti sta in $\mathcal{A}_n$; ora, analogamente a sopra, almeno una delle parti sta in tutti gli $\mathcal{A}_n$, quindi sta in $\mathcal{A}_\omega$, e la tesi è dimostrata. $\square$

Esercizio 0.3. *Ogni insieme numerabile in ${}^*\mathbb{N}$ è limitato.*

Dimostrazione. Siano dati $[a^i] \in {}^*\mathbb{N}$ con $i \in \omega$: siano $a^i \in [a^i]$ dei rappresentanti delle classi di congruenza: definisco la successione s degli $s_j := 1 + max\{a^i_j : i \leq j\}$; considero infine la classe di congruenza di s in ${}^*\mathbb{N}$; $[s]$ è il maggiorante cercato: infatti per ogni i l'insieme degli indici $\{j : s_j > a^i_j\}$ è cofinito, quindi $s > a^i$. $\square$

Esercizio 0.4. $|{}^*\mathbb{N}| = c$

Dimostrazione. La disuguaglianza $|{}^*\mathbb{N}| \leq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = c$ è ovvia dalla definizione di ${}^*\mathbb{N}$.
Considero il seguente sottoinsieme di ${}^*\mathbb{N}$: per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ prendo la successione a data da $a_i := \sum_{j=0}^{i} f(j)2^j$: due successioni ottenute da due funzioni diverse f e g non stanno nella stessa classe di congruenza perchè l'insieme degli indici su cui le loro componenti coincidono è finito (dal primo indice i tale che $f(i) \neq g(i)$ in poi le successioni hanno componenti diverse). Quindi ho trovato tante classi di congruenza distinte quante le funzioni da $\mathbb{N}$ in $\{0,1\}$, cioè $2^{\mathbb{N}} = c$. Quindi $c \leq {}^*\mathbb{N} \leq c$ da cui la tesi per Cantor-Bernstein. $\square$