Federico Bobbio. Esercizi del Corso "Ultrafiltri e metodi non standard":

Esercizi prima lezione

Definizione 1. Dato $\mathcal{F}$ filtro su I e X spazio topologico, dico che $y \in X$ è $\mathcal{F} - limite$ di una successione $\{x_i\}$ se per ogni intorno U di y $\{i \in I | (x_i) \in U\} \in \mathcal{F}$.

Definizione 2. X_j compatto sse per ogni I-successione $(x_i | i \in I)$ di elementi di X e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I esiste $\mathcal{U} - lim x_i \in X$.

Teorema 3. *X compatto sse per ogni insieme di indici I, per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, ogni successione $(x_i)_{i \in I}$ ammette $\mathcal{U} - limite$.*

Teorema 4 (Thychonoff)**.** *Il prodotto di spazi compatti è compatto.*

Proof. Sia X_j al variare di $j \in J$ compatti. Allora per ogni j c'è una successione $(x_j^h)_{h \in I} \in X_j$ e $x_j^h \to \bar{x}_j$ in $\mathcal{U}$. $((x_j^h)_j)_h$ successione di ΠX_j che $\mathcal{U}$-converge a $(\bar{x}_j)_j$.
Infatti sia $V = \Pi_{j \in J} V_j$ intorno di $(\bar{x}_j)_j$ con $V_j = X_j$ per tutti tranne un numero finito di $j \in J$.
$\{h \in I | (x_j^h)_{j \in J} \in V\} \in \mathcal{U}$:
Se $V_j = X_j$, ho che $x_j^h \in V_j$ per ogni $h \in I$.
Se $V_j \subsetneq X_j$, per compattezza $U_j = \{h \in I | x_j^h \in V_j\} \in \mathcal{U}$.
Ho che $U_j = I$ tranne che per un numero finito di j: $j_1, .., j_n$ tali che $U_{j_1}, .., U_{j_n} \neq I$ e $U_{j_1}, .., U_{j_n} \in \mathcal{U}$. Allora ho che $\bar{U} = \bigcap_{j \in J} U_j = U_{j_1} \cap .. \cap U_{j_n} \in \mathcal{U}$.
$h \in \bar{U}$ per ogni j $x_j^h \in V_j$ allora $(x_j^h)_j \in V$.
$\bar{U} \subseteq \{h \in I | (x_j^h)_j \in V\}$. D'altra parte sia $h \in \{h \in I | (x_j^h)_j \in V\}$, ma per ogni $j \in J$ abbiamo che se $x_j^h \in V_j$ allora $h \in U_j$, allora $\{h \in I | (x_j^h)_j \in V\} \subseteq \bigcap_{j \in J} U_j = \bar{U}$.

□

Teorema 5. *Ogni filtro $\mathcal{F}$ di I ha un ultrafiltro che lo estende. Inoltre esistono ultrafiltri non principali.*

Proof. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro e sia $Z = \{H \text{ filtro } | H \supseteq \mathcal{F}\}$. Sia $(H_j)_{j \in J}$ una catena di Z. Ho che $\bigcup_{j \in J} H_j$ e' un filtro ed e' un maggiorante. Infatti se $\mathcal{F} \subseteq H_j$ per ogni j, allora $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j \in J} H_j$. Inoltre se $A, B \in \bigcup_{j \in J} H_j$ allora ci sono $h_1, h_2 \in J$ tali che $A \in H_{h_1}$ e $B \in H_{h_2}$ e quindi $A \cap B \in H_{h_2} \subset \bigcup_{j \in J} H_j$. Infine se $A \in \bigcup_{j \in J} H_j$ e $a \subseteq B$ allora ho che esiste $h \in J$ tale che $A \in H_h$ e quindi anche $B \in H_h \subset \bigcup_{j \in J} H_j$. Infine per Zorn l'elemento massimale (per l'inclusione) di Z è un ultrafiltro, per la caratterizzazione degli ultrafiltri.
Infine poichè un ultrafiltro principale non contiene alcun filtro di Frechet di I, ovviamente esso non è principale. □

Esercizi seconda lezione

Lemma 6. *Dimostrare il seguente enunciato nel caso k=3. (in classe si è fatto nel caso k=2).*
Sia $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Allora esiste H infinito con $[H]^3 \subseteq B$.

Proof. Sia $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.
$\Rightarrow \bar{B} = \{n \in N | B_n \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ con $B_n = \{(i,j) \in N^2 | (n,i,j) \in B\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$
$\Rightarrow \bar{B_n} = \{i \in N | B_{ni} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ con $B_{ni} = \{j \in N | (i,j) \in \bar{B_n}\} =\in \{j \in N | (n,i,j) \in B\}\mathcal{U}$
Ora prendiamo $h_1 \in \bar{B}$, allora $B_{h_1} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Allora esiste $k_1 \in B_{h_1}$ tale che $B_{h_1 k_1} \in \mathcal{U}$.
Dunque $\bar{B}$, $B_{h_1 k_1} \in \mathcal{U}$, quindi $\bar{B} \bigcap B_{h_1 k_1} \in \mathcal{U}$, quindi esiste $h_2 \in \bar{B} \bigcap B_{h_1 k_1}$ tale che $B_{h_2} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Allora esiste $k_2 \in B_{h_2}$ tale che $B_{h_2 k_2} \in \mathcal{U}$.
Iterando il processo otteniamo $H = \{h_1, k_1, h_2, k_2, ..\}$. □

Corollario 7. *Il teorema precedente vale anche nel caso $k \in N$ generico.*

Proof. La dimostrazione è come la precedente, solo che bisogna iterare k-1 volte il procedimento che ci porta ad ottenere, a partire da $\bar{B}$ l'insieme $B_{h_{1:1}..h_{1:k-1}} \in \mathcal{U}$. Abbiamo così $H = \{h_{1:1}, .., h_{1:k-1}, h_{2:1}, .., h_{2:k-1}, ..\}$. □

Teorema 8 (Ramsey infinito)**.** *Dimostrare il Teorema di Ramsey nel caso k=3. (in classe si è fatto nel caso k=1,2). Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su N con $[N]^3 = C_1 \sqcup .. \sqcup C_r$. Allora esiste $H \subseteq N$ infinito ed esiste i con $[H]^3 \subseteq C_i$.*

Proof. Abbiamo che $[N]^3 = C_1 \sqcup .. \sqcup C_r$. Allora facciamo le seguenti identificazioni:

$[N]^3 \mapsto \Delta^+ = \{(m_1, m_2, m_3) \in N^3 | m_1 < m_2 < m_3\}$

$C_i \mapsto \{m_1 < m_2 < m_3 | (m_1, m_2, m_3) \in C_i\} = C_i$ (per abuso di notazione continuiamo a chiamarlo C_i)

Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro in N.
$\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \circledast = \{i \in N | \Delta_i^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ con $\Delta_i^+ = \{m < n | i < m < n\}$
$\Leftrightarrow \{j \in N | \Delta_{ij}^+ \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ per ogni $i \in \circledast$
$\Leftrightarrow \{j \in N | (\{i < j < k\}) \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ per ogni $i \in \circledast$
$\Leftrightarrow N \in \mathcal{U}$
Quindi poiche' $[N]^3 = C_1 \sqcup .. \sqcup C_r \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ abbiamo che c'è un i tale che $C_i \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. La tesi segue dal Lemma precedente. □

Corollario 9. *Il Teorema di sopra si dimostra anche nel caso $k \in N$ generico.*

Proof. Nel caso $k \in N$ generico la dimostrazione è la stessa, salvo il fatto che bisogna impiegare k-1 passaggi per osservare che $\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow N \in \mathcal{U}$. Per la conclusione si applica il Corollario del Lemma (quindi per k generico). $\square$