Esercizio 6. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ e sia $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Allora esiste un insieme $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $[H]^3 \subseteq B$.
Utilizzare il fatto appena enunciato per completare la dimostrazione del caso generale del Teorema di Ramsey.

Soluzione Descrivo un procedimento induttivo per costruire un tale insieme H. Utilizzo le notazioni

$$B_n = \{\, (m,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n,m,l) \in B \,\}$$
$$B_{n,m} = \{\, k \in \mathbb{N} \mid (n,m,k) \in B \,\}$$
$$\hat{B} = \{\, n \in \mathbb{N} \mid B_n \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \,\}$$
$$\hat{B}_n = \{\, m \in \mathbb{N} \mid B_{n,m} \in \mathcal{U} \,\}.$$

Poiché $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ si ha, per definizione, che $\hat{B} \in \mathcal{U}$, dunque $\exists h_1 \in \hat{B}$ (in particolare $\hat{B}$ è infinito, essendo $\mathcal{U}$ non principale). Ma $h_1 \in \hat{B}$ significa $B_{h_1} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, cioè, per definizione, che $\hat{B}_{h_1} \in \mathcal{U}$. Dunque anche $\hat{B}_{h_1}$ è infinito e si ha che $\exists h_2 \in \hat{B} \cap \hat{B}_{h_1} \in \mathcal{U}$ e $h_2 > h_1$. Però $h_2 \in \hat{B}_{h_1}$ significa che $B_{h_1,h_2} \in \mathcal{U}$ e $h_2 \in \hat{B}$ implica che $B_{h_2} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ e dunque che $\hat{B}_{h_2} \in \mathcal{U}$. Perciò posso scegliere (dato che $\mathcal{U}$ è non principale) $h_3 > h_2$ tale che

$$h_3 \in \hat{B} \cap \hat{B}_{h_1} \cap \hat{B}_{h_2} \cap B_{h_1,h_2} \in \mathcal{U}.$$

Poiché in particolare $h_3 \in B_{h_1,h_2}$, avrò $(h_1, h_2, h_3) \in B$. Sia $H_3 = \{\, h_1, h_2, h_3 \,\}$; allora $[H_3]^3 \subseteq B$ (identificando le terne non ordinate con le terne crescenti).
Procedo per induzione: suppongo di aver costruito un insieme $H_n = \{\, h_1 < h_2 < \cdots < h_n \,\}$ tale che $[H_n]^3 \subseteq B$ e tale per cui ogni h_i è scelto nell'insieme

$$\hat{B} \cap \left(\bigcap_{1 \le k < i} \hat{B}_{h_k} \right) \cap \left(\bigcap_{1 \le k < l < i} B_{h_k,h_l} \right) \in \mathcal{U} \quad \text{dove} \quad \hat{B}_{h_k}, B_{h_k,h_l} \in \mathcal{U}.$$

Costruisco allora un insieme H_{n+1} con la stessa proprietà tale che $H_{n+1} = H_n \cup \{h_{n+1}\}$ con $h_{n+1} > h_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Si ha che

- $h_n \in \hat{B} \Rightarrow \hat{B}_{h_n} \in \mathcal{U}$;
- $h_n \in \hat{B}_{h_i} \in \mathcal{U}$ per ogni $1 \le i < n$ implica che $B_{h_i,h_n} \in \mathcal{U}$ per ogni $1 \le i < n$.

Dunque esiste $h_{n+1} > h_n$ tale che

$$h_{n+1} \in \hat{B} \cap \left(\bigcap_{1 \le k \le n} \hat{B}_{h_k} \right) \cap \left(\bigcap_{1 \le k < l \le n} B_{h_k,h_l} \right) \in \mathcal{U}$$

Poiché $h_{n+1} \in B_{h_k,h_l}$ per ogni $1 \le k < l \le n$, si ha che $(h_k, h_l, h_{n+1}) \in B$ e dunque $H_{n+1} = H_n \cup \{h_{n+1}\}$ è tale che $[H_{n+1}]^3 \subseteq B$ come cercato.
Per concludere basta considerare $H = \cup_n H_n$.

Osservo che il procedimento visto è facilmente generalizzabile per dimostrare il seguente fatto:

$$\mathcal{U} \text{ non principale su } \mathbb{N}, \quad B \in \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \exists H \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito } \; [H]^k \subseteq B.$$

A questo punto si può utilizzare il lemma per completare la dimostrazione del teorema di Ramsey nel caso k generico. Sia perciò $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ e identifico

$$[\mathbb{N}]^k = \Delta_k^+ = \left\{ (h_1, h_2, \dots, h_k) \;\middle|\; \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k\} \in [\mathbb{N}]^k \right\} \subseteq \mathbb{N}^k.$$

Una colorazione con r colori di $[\mathbb{N}]^k$ induce dunque in modo naturale una colorazione con r colori di $\Delta_k^+ = C_1 \cup \cdots \cup C_r$; il teorema è equivalente a dimostrare che esiste un insieme H infinito e un indice i tali che $[H]^k \subseteq C_i$. Consideriamo l'ultrafiltro

$$\mathcal{V}_k = \bigotimes_{1 \le j \le k} \mathcal{U} \text{ su } \mathbb{N}^k$$

Se avessimo $\Delta_k^+ \in \mathcal{V}_k$, per le proprietà degli ultrafiltri si avrebbe che esiste un indice i tale che $C_i \in \mathcal{V}_k$ e dunque la conclusione seguirebbe direttamente dal lemma dimostrato in precedenza.
Abbiamo già dimostrato che $\Delta_2^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} = \mathcal{V}_2$. Dimostro che $\Delta_k^+ \in \mathcal{V}_k$ per induzione su k. Per ipotesi induttiva ho che $\Delta_{k-1}^+ \in \mathcal{V}_{k-1}$; ma allora

$$\Delta_k^+ \in \mathcal{V}_k \iff \left\{ (n_1, \dots, n_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1} \;\middle|\; (\Delta_k^+)_{(n_1, \dots, n_{k-1})} \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}_{k-1}$$

e la tesi segue da

$$\Delta_{k-1}^+ \subseteq \left\{ (n_1, \dots, n_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1} \;\middle|\; (\Delta_k^+)_{(n_1, \dots, n_{k-1})} \in \mathcal{U} \right\} \in \mathcal{V}_{k-1}$$

poiché

$$(\Delta_k^+)_{(n_1, \dots, n_{k-1})} = \left\{ n_k \in \mathbb{N} \;\middle|\; (n_1, \dots, n_{k-1}) \in \Delta_{k-1}^+ \text{ e } n_{k-1} < n_k \right\} \in \mathcal{U}$$

perché è un insieme infinito (se $(n_1, \dots, n_{k-1}) \in \Delta_{k-1}^+$).

Esercizio 7. Sia $(P, \le)$ un ordine parziale su un insieme P infinito. Allora esiste $X \subset P$ catena infinita oppure esiste $X \subset P$ anticatena infinita.

Soluzione. Posso supporre che P sia numerabile (altrimenti è sufficiente dimostrare l'enunciato per un sottoinsieme numerabile di P), cioè $P = \{ p_1, p_2, \dots \}$, in corrispondenza con $\mathbb{N}$. Definisco una colorazione $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup C_2$ con

$$(i,j) \in \begin{cases} C_1 & \text{se } p_i \text{ e } p_j \text{ sono confrontabili, cioè } p_i \le p_j \text{ oppure } p_j \le p_i \\ C_2 & \text{altrimenti, cioè se } p_i \text{ e } p_j \text{ non sono confrontabili.} \end{cases}$$

Per il teorema di Ramsey, esiste un insieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che $[H]^2 \subseteq C_1$ oppure $[H]^2 \subseteq C_2$. Nel primo caso, $A = \{ p_i \mid i \in H \}$ è un insieme totalmente ordinato e dunque una catena infinita; nel secondo, gli elementi di A sono a due a due non confrontabili e pertanto A è un'anticatena infinita.

Esercizio 8. Dimostrare la versione finita del teorema di Schur

$$\forall r \quad \exists n \quad \forall \{1, 2, \ldots, n\} = C_1 \cup \cdots \cup C_r \quad \exists a < b < a + b \text{ monocromatica}$$

deducendola dalla versione infinita

$$\forall r \quad \forall \mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r \quad \exists a < b < a + b \text{ monocromatica.}$$

Soluzione. Procedo per assurdo. Suppongo che $\exists r$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ posso trovare $\{1, 2, \ldots, n\} = C_1^n \cup C_2^n \cup \cdots \cup C_r^n$ che fornisca un controesempio, cioè per cui non esista una terna $a < b < a + b$ monocromatica. Fisso un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni $x \in \mathbb{N}$ definisco

$$\Lambda_i(x) = \{ n \mid x \in C_i^n \} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Si ha dunque che

$$\Lambda_1(x) \cup \Lambda_2(x) \cup \cdots \cup \Lambda_r(x) = \{n | n \geq x\} \in \mathcal{U}$$

poiché è un insieme cofinito e dalle proprietà degli ultrafiltri segue che esiste un indice i tale che $\Lambda_i(x) \in \mathcal{U}$. Definisco una colorazione su $\mathbb{N}$ associando ogni naturale x ad un indice i per cui $\Lambda_i(x) \in \mathcal{U}$ e sia

$$D_i = \{ x \mid x \text{ ha colore } i \}$$

Dunque si ottiene $\mathbb{N} = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_r$ e per la versione infinita del teorema di Schur si ha che esiste un indice i tale che esistono $a < b < a + b \in D_i$. Questo significa che $\Lambda_i(a), \lambda_i(b), \Lambda_i(a + b) \in \mathcal{U}$ e pertanto anche che

$$\Lambda_i(a) \cap \Lambda_i(b) \cap \Lambda_i(a + b) \in \mathcal{U}.$$

In particolare l'intersezione non è vuota e contiene un elemento $\bar{n}$. Per tale $\bar{n}$ si ha che $\bar{n} \in \Lambda_i(a)$, cioè $a \in C_i^n$; analogamente anche b e $a+b$ appartengono a C_i^n. Ciò contraddice l'ipotesi iniziale e si arriva all'assurdo.

Esercizio 9. Dimostrare che la versione finita del teorema delle distanze

$$\forall m \;\; \forall r \;\; \exists n \;\; \forall \{1, 2, \ldots, n\} = C_1 \cup \cdots \cup C_r \;\; \exists \, |H| = m \text{ tale che } \Delta(H) \text{ è monocromatico}$$

implica il seguente fatto:

$$\forall r \;\; \forall \mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r \;\; \exists i \text{ tale che } \Delta(B) \subseteq C_i \text{ per insiemi } B \text{ arbitrariamente grandi.}$$

Soluzione. Sia r fissato e $\mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ una colorazione di $\mathbb{N}$. Definisco una seconda colorazione su $\mathbb{N}$ in questo modo:

- La colorazione data definisce in modo naturale una colorazione sull'insieme
$$\{1, 2, \ldots, n\} = C_1^n \cup \cdots \cup C_r^n,$$
dove si intende che $C_i^n = \{k \le n | k \in C_i\}$.

- Considero $m \in \mathbb{N}$; il teorema delle distanze (versione finita) implica che $\exists \bar{n}$ tale che per $\{1, 2, \ldots, \bar{n}\} = C_1^{\bar{n}} \cup \cdots \cup C_r^{\bar{n}}$ esiste $|H_m| = m$ e $1 \le i \le r$ con $\Delta(H_m) \subseteq C_i^{\bar{n}} \subseteq C_i$. Assegno perciò ad $m \in \mathbb{N}$ il colore i-esimo.

- Definisco $D_i = \{ \, m \in \mathbb{N} \mid \Delta(H_m) \subseteq C_i \, \}$ e ora $\mathbb{N} = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_r$.

Pertanto esiste un indice i per cui D_i è infinito; si conclude osservando che allora C_i contiene insiemi di differenze di insiemi arbitrariamente grandi, per come è stato definito D_i, e la tesi segue.

Esercizio 10. Un insieme A si dice Δ-set se esiste H infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$. A si dice invece Δ_f-set se $\forall m \; \exists |H| = m$ con $\Delta(H) \subseteq A$.

1. Trovare un insieme A che non sia un Δ_f-set.

2. Trovare un insieme A che sia Δ_f-set, ma non Δ-set.

3. Dimostrare che la famiglia dei Δ-set è regolare per partizioni.

4. Dimostrare che la famiglia dei Δ_f-set è regolare per partizioni.

Soluzione.

1. L'insieme delle potenze di 2, $A = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ non è un Δ_f-set (e dunque nemmeno un Δ-set). Non può infatti esistere H con $|H| = 4$ tale che $\Delta(H) \subseteq 4$. Se un tale H esistesse, infatti, ci dovrebbe essere un minimo n tale che $2^n \in \Delta(H)$, cioè esistono $b > a \in H$ tali che $b - a = 2^n$. Sia $H = \{a, b, c, d\}$. Distinguo i casi:

   - $|c - b| = 2^n$: allora $c > b$, e $c - a = 2^{n+1}$. Se anche $|d - c| = 2^n$, allora $d > c$ e $d - a = 3 \cdot 2^n \notin A$. Allora necessariamente $|d - c| = 2^{n+k}$ con $k > 0$. Se fosse $k = 1$, si avrebbe $d > c$ e $d - b = 3 \cdot 2^n$, assurdo. Dunque $k > 1$, ma in questo caso se $d < c$ allora $b - d = 2^{n+k} - 2^n \notin A$, mentre se $d > c$ $d - b = 2^n + 2^{n+k} \notin A$.

   - $|c - b| = 2^{n+k}$ con $k > 0$. Se fosse $c < b$ si avrebbe $a - c = 2^{n+k} - 2^n \in A$ che implica $k = 1$. Quindi $b - a = 2^n$ e $a - c = 2^n$ e a meno dell'ordine il caso è già stato considerato al punto precedente. Dunque $c > b$; ma allora $c - a = 2^{n+k} + 2^n \notin A$.

2. Considero l'insieme A formato dai numeri della forma $n!\cdot k$ dove $n \in \mathbb{N}$ e $0 < k \leq n$. Questo insieme è un Δ_f-set: infatti per ogni intero m si costruisce un insieme $|H| = m$ tale che $\Delta(H) \subseteq A$ considerando

$$H = \{0, (m-2)!, 2(m-2)!, \ldots, (m-2)(m-2)!, (m-1)!\}.$$

Per costruzione, $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq A$.
Dimostro dunque che l'insieme considerato non è un Δ-set. Procedo per assurdo: suppongo che esista H infinito con $\Delta(H) \subseteq A$. A meno di sottrarre a tutti gli elementi di H il minimo naturale contenuto in esso, posso supporre $0 \in H$ (le differenze non cambiano) e dunque anche $H \subseteq \Delta(H) \subseteq A$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono infiniti elementi di H divisibili per $n!$. Posso pertanto scegliere $h_1, h_2 \in H$ tali che $h_1 = n! \cdot k$ con $n > 0$ e $1 \leq k \leq n$ e $h_2 = (n+a)! \cdot l$ con $a > 1$ e $1 \leq l \leq n+a$: infatti si può prendere $h_1 = \min(H \setminus \{0\})$ e h_2 di conseguenza. Distinguo due casi:

- $l \neq 1$. Allora si ha che

$$(n+a)! \cdot l > (n+a)! \cdot l - n! \cdot k > (n+a)! \cdot (l-1)$$

  poiché $(n+a)! > n! \cdot k$. Ne segue che la differenza dei due numeri considerati non può appartene ad A, essendo strettamente compresa tra due elementi consecutivi dell'insieme.

- $l = 1$. Allora vale:

$$(n+a)! > (n+a)! - n! \cdot k > (n+a-1)! \cdot (n+a-1)$$

  e quindi si conclude analogamente al caso precedente. La seconda disuguaglianza è vera in quanto $a > 1$ implica $(n+a-1)! > n! \cdot k$, cioè

$$(n+a)!\Big(1 - \frac{n-a-1}{n+a}\Big) = (n+a)! \cdot \frac{1}{n+a} > n! \cdot k.$$

Dunque non può essere $\Delta(H) \subseteq A$ e si arriva all'assurdo.

3. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia dei Δ-set e sia $A = C_1 \cup \ldots, C_r \in \mathcal{A}$. Per ipotesi, esiste un insieme H infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$; scrivo $H = \{h_1 < h_2 < \ldots\}$. La colorazione considerata su A induce una colorazione $[H]^2 = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ con

$$\{h_m < h_n\} \in D_i \iff (h_n - h_m) \in C_i.$$

A sua volta questa induce una colorazione $[\mathbb{N}]^2 = D_1' \cup \cdots \cup D_r'$ dove

$$\{n < m\} \in D_i' \iff \{h_n < h_m\} \in D_i.$$

Per il teorema di Ramsey, esiste un insieme $\tilde{K}$ infinito e un indice i tali che $[\tilde{K}]^2 \subseteq D_i'$. Sia dunque $K = \{\ h_k \in H \mid k \in K\ \}$; si ha che, per come sono stati definiti, K è infinito e $[K]^2 \subseteq D_i$, cioè $\Delta(K) \subseteq C_i$. Ciò implica che C_i è un Δ-set, da cui la tesi.

4. Sia ora A un Δ_f-set e sia $A = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ una sua colorazione. Per ogni naturale n si ha che esiste un insieme $H_n = \{h_{1,n} < h_{2,n} < \cdots < h_{n,n}\}$ tale che $\Delta(H_n) \subseteq A$. Come per il punto precedente, la colorazione di A induce una colorazione, per ogni n,
$$[H_n]^2 = D_{1,n} \cup \cdots \cup D_{r,n}$$
dove $\{h_{j,n} < h_{k,n}\} \in [H_n]^2$ appartiene a $D_{i,n}$ se e solo se $(h_{k,n} - h_{j,n}) \in C_i$. A sua volta questa induce una colorazione
$$[\{1, 2, \dots, n\}]^2 = D'_{1,n} \cup \cdots \cup D'_{r,n}$$
dove
$$\{j < k\} \in D'_{i,n} \iff \{h_{j,n} < h_{k,n}\} \in D_{i,n}.$$
Fissato dunque m naturale, per la versione finita del teorema di Ramsey si può trovare un n tale per cui, nella colorazione sopra descritta, esiste un indice i ed esiste un insieme $\tilde{K}_m$ con $|\tilde{K}_m| = m$ e $[\tilde{K}_m]^2 \subseteq D'_{i,n}$. Questo implica che $K_m = \{\, h_{j,n} \in H_n \mid j \in K_m \,\} \in D_{i,n}$ e cioè che $\Delta(K_m) \in C_i$. Pertanto per ogni $m \in \mathbb{N}$ trovo i tale che C_i contenga l'insieme delle differenze di un insieme di cardinalità m e dunque realizzo una colorazione
$$\mathbb{N} = F_1 \cup \cdots \cup F_r$$
dove, dopo aver associato ad ogni $m \in \mathbb{N}$ un indice i come detto, ho $m \in F_i$. In particolare almeno uno degli insiemi F_j deve essere infinito; ne segue che esiste C_j tale per cui esiste M con $\Delta(M) \subseteq C_j$ di cardinalità arbitrariamente grande, cioè C_j è un Δ_f-set.

Esercizio 11. Trovare una partizione dei numeri naturali in due insiemi C_1 e C_2 tali che né C_1 né C_2 contengano progressioni aritmetiche infinite.

Soluzione. Considero i numeri triangolari $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 1+2 = 3, t_3 = 1+2+3 = 6, \dots, t_n = \frac{n(n+1)}{2}, \dots$ e gli insiemi
$$T_0 = \{0\}; \quad T_n = \{\, t_{n-1} + 1, t_{n-1} + 2, \dots, t_n \,\}, \quad n \geq 1$$
Noto che $|T_n| = n$ per $n \geq 1$. Considero dunque
$$C_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{2k}; \quad C_2 = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_{2k+1}.$$
Gli insiemi C_1 e C_2 così costruiti soddisfano le richieste poiché $\mathbb{N} = C_1 \cup C_2$ e nessuno dei due può contenere progressioni aritmetiche infinite. Se ad esempio C_1 contenesse una progressione aritmetica infinita di ragione d, dovrebbe avere intersezione non vuota con ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ formato da almeno d numeri naturali consecutivi (maggiori di un certo n_0, punto di partenza della progressione), ma, ad esempio $C_1 \cap T_{2^n d+1} = \emptyset \, \forall n \in \mathbb{N}$, da cui l'assurdo. Un ragionamento analogo vale per C_2, da cui la tesi.

Esercizio 12. Dimostrare, usando il teorema di compattezza, che la versione infinita del teorema delle distanze implica la versione finita.

Soluzione. Fisso m, r naturali positivi. Considero $\mathcal{A} = \{\Delta(A) \mid |A| = m\}$. $\mathcal{A}$ è r-regolare su $\mathbb{N}$ per il teorema delle distanze (versione infinita); infatti data una colorazione $\mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, esiste un indice i ed esiste H infinito tale che $\Delta(H) \subseteq C_i$ e in particolare esiste un sottoinsieme di H di cardinalità m con insieme delle distanze monocromatico (in $\mathcal{A}$). Per il teorema di compattezza combinatoria esiste allora $Y \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $\mathcal{A}$ è r-regolare su Y. Essendo Y finito, $\exists \bar{n}$ tale che $Y \subseteq \{1, 2, \ldots, \bar{n}\}$. Considero ora una qualunque colorazione $\{1, 2, \ldots, \bar{n}\} = C_1 \cup \cdots \cup C_r$. Essa induce una colorazione su Y: $Y = C'_1 \cup \cdots \cup C'_r$ con $C'_i = C_i \cap Y$. Poiché $\mathcal{A}$ è r-regolare su Y, esiste $\Delta(A) \in \mathcal{A}$ (cioè $|A| = m$), ed esiste i tali che $\Delta(A) \subseteq C'_i \subseteq C_i$, che implica il teorema delle distanze nella versione finita.

Esercizio 13. Dimostrare, usando il teorema di compattezza, che la versione infinita del teorema di Ramsey implica la versione finita.

Soluzione. Fisso m, k, r naturali come nelle ipotesi del teorema di Ramsey. Considero la famiglia $\mathcal{A} = \{[A]^k \mid |A| = m\}$; è r-regolare su $[N]^k$ per il teorema di Ramsey infinito. Dunque $\mathcal{A}$ è r-regolare su un insieme finito $Y \subseteq \big[\{1, 2, \ldots, \bar{n}\}\big]^k \subset [N]^k$. Ne segue che data una colorazione $\big[\{1, 2, \ldots, \bar{n}\}\big]^k = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ esiste un indice i e un insieme $[A]^k \in \mathcal{A}$ tali che $[A]^k \subseteq C_i$, cioè la versione finita del teorema di Ramsey.