Dario Ascari

Esercizi del corso di ultrafiltri

assegnati il 3/3/15

Esercizio 0.1. *Trovare un Δ_f-set A che non sia un Δ-set.*

Dimostrazione. Costruisco l'insieme A nel seguente modo:

- $A_0 := \{1\}$
- Dato A_n, considero la somma s_n dei suoi elementi: definisco A_{n+1} come A_n a cui aggiungo la progressione aritmetica formata dai primi n multipli di $2s_n$: $A_{n+1} := A_n \cup \{2s_n, 4s_n, 6s_n, ..., 2ns_n\}$
- $A := \bigcup_{n\in\omega} A_n$

In questo modo A contiene progressioni aritmetiche lunghe a piacere, quindi esistono insiemi X finiti grandi a piacere con tutte le differenze contenute in A (basta prendere come insieme X una delle progressioni aritmetiche aggiunte in uno dei passi della ricorsione, e le differenze dei suoi elementi risultano essere ancora elementi della progressione, e quindi appartengono ad A). Quindi A è un Δ_f-set.
Supponiamo per assurdo che A sia un Δ-set: allora esiste $X = \{x_1, x_2, ...\}$ ($x_1 < x_2 < ...$) tale che tutte le differenze tra le coppie di suoi elementi stanno in A. In particolare $x_2 - x_1 \in A_k$. Dato che x_i tende a $+\infty$, deve esistere un ultimo indice $h \geq 2$ tale che $x_h - x_1 \in A_k$ (e quindi $x_{h+1} - x_1 \notin A_k$). Ma allora $x_{h+1} - x_1 \geq 2s_k$ (perchè tutti gli elementi di $A \setminus A_k$ sono $\geq 2s_k$) e $x_h - x_1 < s_k$, quindi $x_{h+1} - x_h > s_k$, dunque $x_{h+1} - x_h \notin A_k$. Avrei allora due elementi di $A \setminus A_k$ che differiscono tra loro di meno di s_k ($x_{h+1} - x_h$ e $x_{h+1} - x_1$), che è assurdo per come ho definito gli A_i (la differenza tra due elementi di $A \setminus A_i$ èsempre almeno $2s_i$). Quindi A non è un Δ-set. □

Esercizio 0.2. *Trovare un insieme A che non è un Δ_f-set.*

Dimostrazione. Basta prendere $A := \{3^k : k \in \mathbb{N}\}$. Se esistesse un insieme X con almeno tre elementi e con le differenze tra le coppie di elementi tutte contenute in A, avrei all'interno di A tre elementi di cui uno somma degli altri due (per esempio $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ e $x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$) che è assurdo (ogni potenza di 3 è più grande della somma di due qualsiasi delle potenze precedenti). □

Esercizio 0.3. *Le famiglie dei Δ-set e dei Δ_f-set sono regolari per partizione.*

Dimostrazione. Sia dato un Δ-set A, il corrispondente insieme infinito X ed una r-colorazione di A. Coloro ogni coppia di elementi di X con il colore della loro differenza. Per il teorema di Ramsey infinito (caso k=2), c'è un sottoinsieme infinito $Y \subseteq X$ con tutte le coppie di elementi dello stesso colore. Il sottoinsieme di A di quel colore dunque un Δ-set (contiene l'insieme delle differenze di Y).
Analogamente, sia dato un Δ_f-set A e una sua r-colorazione. Per ogni intero a esiste un insieme finito X_a con almeno n elementi e le cui differenze tra coppie di elementi sono tutte contenute in A. Scelgo ora un intero m e applico il teorema di Ramsey finito al caso m, $k = 2$, r: esiste un intero n tale che per ogni r-colorazione delle coppie di suoi elementi, c'è un sottoinsieme di m elementi con tutte le coppie dello stesso colore. Considero dunque X_n e coloro ogni coppia di suoi elementi con il colore della loro differenza: esiste un insieme di m elementi tale che ogni coppia di elementi di tale insieme ha differenza dello stesso colore in A. Ripetendo il procedimento al variare di m, visto che il numero di colori è finito, c'è almeno un colore che viene scelto infinite volte: l'insieme degli elementi di A di quel colore è un Δ_f-set. $\square$