Esercizi sulle proprietà elementari degli ultrafiltri

Guglielmo Nocera

8 marzo 2015

Esercizio 1. *Per un filtro $\mathcal{F}$ su I sono equivalenti:*
1) $A^c \notin \mathcal{F} \Longrightarrow A \in F$
2) $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists i \; A_i \in \mathcal{F}$
3) $\mathcal{F}$ *massimale rispetto all'inclusione.*

Dim. 1)$\Longrightarrow$2). Per induzione. $n = 1$ immediato. $n > 1 : A_1 \notin \mathcal{F} \Longrightarrow A' = A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup I \setminus A$. Allora $A_2 \cup \cdots \cup A_n = A' \cap A \in \mathcal{U}$, per cui si può applicare l'ipotesi induttiva e concludere.
2)$\Longrightarrow$1). $A \cup A^c \in \mathcal{F}$, dato che ogni filtro non vuoto deve contenere lo spazio per l'assioma di chiusura rispetto al contenimento. Quindi $A \in \mathcal{F} \vee A^c \in \mathcal{F}$.
1)$\Longrightarrow$3). Supponiamo che esistano $A \notin \mathcal{F}$ ed $\mathcal{E}$ filtro contenente A che estende $\mathcal{F}$. Allora $A^c \in \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ assurdo.
3)$\Longrightarrow$1). $A \notin \mathcal{F}, A^c \notin \mathcal{F}$. Supponiamoli entrambi non vuoti, altrimenti la tesi è banale. Allora almeno uno fra A e A^c è intersecato almeno una volta da tutti i $B \in \mathcal{F}$. Infatti, se $\exists B \cap A = \varnothing, B' \cap A^c = \varnothing$, allora $\varnothing = B \cap B' \in \mathcal{F}$, impossibile. Quindi esiste $\mathcal{E}$ che contiene uno fra A e A^c ed estende $\mathcal{F}$ a filtro (supponendo che A rispetti la condizione detta, basta aggiungere a $\mathcal{F}$ tutte le intersezioni di A con gli elementi di $\mathcal{F}$, che sono non vuote, e tutti i sottoinsiemi di I contenenti A). Ciò è assurdo per (3). $\square$

Esercizio 2. *Filtri su I e ideali in $Fun(I, \mathbb{R})$ di corrispondono. La stessa corrispondenza si restringe a ultrafiltri e ideali massimali.*

Dim. ($\longleftarrow$) Sia $\mathfrak{M}$ ideale proprio in $Fun(I, \mathbb{R})$. Allora $\mathcal{U} = \{Z(\phi) | \phi \in \mathfrak{M}\}$ è un filtro. Infatti

- $\varnothing \notin \mathcal{U}$ altrimenti $1 \in \mathfrak{M}$.
- $B \supseteq Z(f) \Longrightarrow B = Z((1 - \chi_B)f) \in \mathcal{U}$
- $A = Z(f), B = Z(g) \Longrightarrow A \cap B = Z(f^2 + g^2) \in \mathcal{U}$

($\longrightarrow$) $\mathcal{F}$ filtro su I. Allora $\mathfrak{M} = \{\phi | Z(\phi) \in \mathcal{U}\}$ è un ideale in $Fun(I, \mathbb{R})$. Infatti $0 \in \mathfrak{M}, f \in \mathfrak{M} \Longrightarrow -f \in \mathfrak{M}, Z(f+g) \supseteq Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{U}$ se $f, g \in \mathfrak{M}$, $Z(fg) \supseteq Z(f) \in \mathcal{U} \; \forall f \in \mathfrak{M}$, quindi $fg \in \mathfrak{M}$.

Supponiamo ora $\mathfrak{M}$ massimale,e sia $\mathcal{U}$ il filtro da esso indotto su I. Proviamo che è un ultrafiltro. Se $A \notin \mathcal{U}$, supponiamo che esista $\mathcal{F}$ che estende $\mathcal{U}$ e contiene A. Allora $\mathfrak{M}' = \{\phi | Z(\phi) \in \mathcal{F}\}$ contiene $\mathfrak{M}$ e quindi è tutto $Fun(I, \mathbb{R})$. Allora $1 \in \mathfrak{M}'$ e quindi $\varnothing \in \mathcal{U}$, assurdo. Dunque $\mathcal{U}$ è massimale rispetto all'inclusione. Sia viceversa $\mathcal{U}$ ultrafiltro, e $\mathfrak{M}$ l'ideale indotto. Supponiamo che esista $\phi \in Fun(I, \mathbb{R})$ t.c. $(\mathfrak{M}, \phi) \neq Fun(I, \mathbb{R})$ e $Z(\phi) \notin \mathcal{U}$, allora $(\mathfrak{M}, \phi)$ìnduce un filtro contenente strettamente $\mathcal{U}$, assurdo. $\square$

Esercizio 3. *Il prodotto tensoriale fra ultrafiltri, definito da*

$$A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Longleftrightarrow \{i \in I | A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U},$$

soddisfa:

(1) *è un ultrafiltro su* $I \times J$.

(2) *è principale se e solo se lo sono* $\mathcal{U}$ *e* $\mathcal{V}$.

(3) $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$

(4) $\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \Longrightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$

Dim.

(1) – Certamente $\varnothing \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, dato che $\{i \in I | \varnothing_i \in \mathcal{V}\} = \varnothing \notin \mathcal{U}$.

– $A \cap B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \iff \{i \in I | (A \cap B)_1 \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff \{i \in I | A_i \cap B_i \in \mathcal{V}\} = \{i \in I | A_i \in \mathcal{V}\} \cap \{i \in I | B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, dove i passaggi sono giustificati dal fatto che $(A \cap B)_i = (A_i \cap B_i)$ e $C \cap D \in \mathcal{V} \iff C, D \in \mathcal{V}$ (dagli assiomi di intersezione e contenimento). Poiché l'ultima appartenenza è vera, si conclude.

– $B \supseteq A \Longrightarrow \{i \in I | B_i \in \mathcal{V}\} \supseteq \{i \in I | A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Longrightarrow B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

– $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Longrightarrow \{i \in I | A_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U} \Longrightarrow \{i \in I | A_i \in \mathcal{V}\}^c = \{i \in I | A_i \notin \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Longrightarrow \{i \in I | (A_i)^c \in \mathcal{V}\} = \{i \in I | (A^c)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$

(2) $A \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ finito $\Longrightarrow \{i \in I | A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ è finito, e così pure ogni A_i. Quindi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ contengono entrambi insiemi finiti. Viceversa, se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sono principali, esistono A, B finiti t.c. $A \times B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti $\{i \in I | (A \times B)_i \in \mathcal{V}\} = \{i \in A | (A \times B)_i \in \mathcal{V}\} = \{i \in A | B \in \mathcal{V}\} = A \in \mathcal{U}$.

(3) $A \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} \iff \{(i,j) \in I \times J | A_{i,j} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \iff \{i' \in I | \{(i,j) \in I \times J | A_{i,j} \in \mathcal{W}\}_{i'} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff \{i' \in I | \{j' \in J | (i',j') \in \{(i,j) \in I \times J | A_{i,j} \in \mathcal{W}\}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff \{i' \in I | \{j' \in J | A_{i',j'} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff \{i' \in I | \{j' \in J | \{k \in K | (i',j',k) \in A\} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff \{i' \in I | A_{i'} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{U}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$.

(4) Supponiamo $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing, A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ (l'altro caso è simmetrico). Allora

$$A \times B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \iff \mathcal{U} \ni \{i \in I | (A \times B)_i\} = \{i \in A | B \in \mathcal{V}\} = A$$

$$A \times B \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U} \iff \mathcal{V} \ni \{i \in I | (A \times B)_i \in \mathcal{U}\} = \begin{cases} \varnothing & se\ B \notin \mathcal{U} \\ A & se\ B \in \mathcal{U} \end{cases}$$

La prima appartenenza è verificata mentre la seconda non lo è in nessuno dei due casi. Quindi $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \setminus (\mathcal{V} \otimes \mathcal{U})$ è non vuoto.