Dimostrazione via ultrafiltri del teorema di Tychonov sui compatti

Guglielmo Nocera

8 marzo 2015

Definizione 1. *Dati uno spazio topologico (X, τ), un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I e una successione $(x_i)_{i \in I} \subset X$ si dice che $y = \mathcal{U}\text{-}\lim x_i$ se e solo se per ogni intorno aperto U di y l'insieme $\Lambda(U) = \{i \in I | x_i \in U\}$ appartiene ad $\mathcal{U}$.*

Definizione 2 (Compatto per ultrafiltri)**.** *Uno spazio topologico (X, τ) si dice compatto per ultrafiltri se e solo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su un qualunque insieme di indici i e ogni successione $(x_i) \subset X$, $i \in I$ esiste $y \in X$ tale che $y = \mathcal{U}$-lim x_i.*

Teorema 1. *Uno spazio X è compatto se e solo se è compatto per ultrafiltri.*

<u>*Dimostrazione:*</u> ($\Longrightarrow$) Sia X compatto. Supponiamo che, dati $\mathcal{U}$ e (x_i), $\forall\ y \exists\ U_y \ni y \Lambda(U_y) \notin \mathcal{U}$. Allora $\{U_y\}_{y \in X}$ è un ricoprimento aperto di X, che ammette per ipotesi un sottoricoprimento finito $\{U_k\}_{k=1}^n$. Evidentemente gli $\{U_k\}$ ricoprono (x_i), quindi $\bigcup_{k=1}^{n} \Lambda(U_k) = X$ e per ogni k vale $\Lambda(U_k) \notin \mathcal{U}$, quindi $\Lambda(U)^c \in \mathcal{U}$. Segue $\varnothing = \bigcap_{k=1}^{n} \Lambda(U_k) \in \mathcal{U}$, assurdo.

($\Longleftarrow$) Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di X che non ammette sottoricoprimenti finiti. Allora la famiglia $\{A_i^c\}_{i \in I}$ si estende ad un filtro (e quindi ad un ultrafiltro) su X stesso, dato che le intersezioni di sottofamiglie finite sono sempre non vuote: infatti, se J è un insieme finito di indici,

$$\bigcap_{j \in J} A_j^c = (\bigcup_{j \in J} A_j)^c \neq \varnothing$$

altrimenti $\mathcal{A}$ ammetterebbe un sottoricoprimento finito. Quindi esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che non contiene alcun elemento di $\mathcal{A}$ (dato che contiene tutti i complementari), ma ciò è assurdo dato che ad esempio la X-successione identità ($x_\alpha = \alpha\ \forall \alpha \in X$) ammette per ipotesi un $\mathcal{U}$-limite y, che è contenuto in un qualche $A_{\bar{i}}$ che risulta coincidere con $\Lambda(A_{\bar{i}})$ che quindi non sta in $\mathcal{U}$.

Nota 1. Ripercorrendo la dimostrazione, appare chiaro che si è in realtà dimostrato un asserto apparentemente più forte, ovvero che nella compattezza per ultrafiltri si può assumere che l'insieme degli indici coincida con il sostegno dello spazio X e che la successione sia in realtà l'identità. Infatti una implicazione è *a fortiori*, e l'altra discende dal fatto che l'ultrafiltro assurdo esibito nella dimostrazione è appunto del tipo di cui stiamo parlando. La tesi può essere dunque formulata nel seguente modo: X è compatto se e solo se la X-successione identità ha un $\mathcal{U}$-limite rispetto a qualunque ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X.

Corollario 2 (Teorema di Tychonov)**.** *Prodotto infinito di spazi compatti è compatto.*

<u>*Dimostrazione:*</u> Basta ora dimostrare che la proprietà di compattezza per ultrafiltri passa al prodotto. Sia $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Certamente, dati un ultrafiltro $\mathcal{U}$ e una successione $(x_i)_{i \in I}$, per ogni α in A esiste $y^\alpha = \mathcal{U}\text{-}\lim x_i^\alpha$, dove (x_i^α) è la proiezione su X_α di x_i. Sia ora $y = (y^\alpha) \in X$. Vogliamo dimostrare che per ogni aperto $U \ni y$ vale $\Lambda(U) \in \mathcal{U}$. Sfruttando quanto osservato nella *Nota 1*, in realtà, ci basta dimostrare la tesi per $I = X$, $x_i = i\ \forall i \in X$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro su X. Quindi ci basta dimostrare che, definiti y e U come sopra, $U \in \mathcal{U}$. D'altra parte, $\mathcal{U}$ induce degli ultrafiltri $\mathcal{U}_\alpha$ dati dalle sue proiezioni sugli X_α.[1] Per definizione di topologia prodotto

[1] Dimostriamo che essi sono effettivamente ultrafiltri: evidentemente $\varnothing$ non appartiene ad alcuno di essi, altrimenti un elemento di $\mathcal{U}$ sarebbe contenuto in un prodotto con un fattore vuoto. Inoltre se $A_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$, $A, B \in \mathcal{U}$, vale $A_\alpha \cap B_\alpha \supseteq (A \cap B)_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$. Analogamente si ha la chiusura per contenimento. Infine, se $A \subset X$, e $(A_\alpha)^c \notin \mathcal{U}_\alpha$, supponiamo che $\prod_{j<\alpha} X_j \times A_\alpha \times \prod_{j>\alpha} X_j$ non stia in $\mathcal{U}$. Allora il suo complementare starebbe in $\mathcal{U}$, e quindi la sua proiezione $(A_\alpha)^c$ starebbe in $\mathcal{U}$, assurdo. Quindi $A_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ in quanto proiezione di $\prod_{j<\alpha} X_j \times A_\alpha \times \prod_{j>\alpha} X_j$.

esiste V prodotto di aperti che chiameremo rispettivamente U_α, $y^\alpha \in U_\alpha \subset X_\alpha$ al variare di α, contenuto in U. Supponiamo che V non stia in $\mathcal{U}$. Allora il suo complementare in X sta in $\mathcal{U}$ ed è quindi non vuoto. Per costruzione deve esistere α tale che $U_\alpha \cap (V^c)_\alpha = \varnothing$. Ma poiché per definizione $(V^c)_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ ciò significherebbe che $y \in U_\alpha \notin \mathcal{U}_\alpha$, assurdo per l'ipotesi di compattezza degli X_α. Quindi $V \in \mathcal{U}$ e per contenimento $U \in \mathcal{U}$.

Nota 2. Nelle costruzioni della parte finale di quest'ultima dimostrazione si è utilizzato l'assioma della scelta, ad esempio nell'affermare l'esistenza di U_α t.c. $U_\alpha \cap (V^c)_\alpha = \varnothing$. Nel caso di prodotto finito, ciò è invece vero indipendentemente da AC.