# Esercizi del corso di “Ultrafiltri e metodi non standard”

Giada Franz

8 marzo 2015

## 1 $\Delta$-set

**Definizione 1.1.** Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice $\Delta$-set se esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$, dove $\Delta(H) = \{h' - h \mid h' > h \in H\}$.

**Definizione 1.2.** Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice $\Delta_f$-set se per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq A$.

*Nota* 1.3. È immediato notare che la famiglia dei $\Delta_f$-set contiene quella dei $\Delta$-set. Il contenimento è però stretto in quanto esistono sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{N}$ che sono $\Delta_f$-set ma non sono $\Delta$-set.

*Dimostrazione.* Consideriamo il sottoinsieme $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathbb{N}$, dove $A_n = \{k_n\,,\, 2k_n\,,\, \dots\,,\, nk_n\}$ e $(k_n)$ è una successione di numeri naturali tali che $k_{n+1} > 2nk_n$. Notiamo innanzitutto che gli $A_n$ sono a due a due disgiunti per costruzione. Vogliamo dimostrare che $A$ è un $\Delta_f$-set ma non è un $\Delta$-set.

È facile mostrare che $A$ è un $\Delta_f$-set, infatti dato $H = \{a\,,\, a + k_m\,,\, \dots\,,\, a + mk_m\}$ con $a \in \mathbb{N}$ si ha che $\Delta(H) = \{k_m\,,\, \dots\,,\, mk_m\} = A_m \subseteq A$, per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Supponiamo ora invece che esista $H = \{h_1 < h_2 < \dots\}$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$. Poiché la successione $(h_m - h_2)_{m\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente, esiste sicuramente $m$ abbastanza grande tale che $h_m - h_2$ e $h_2 - h_1$ appartengono a due $A_n$ diversi, cioè $h_m - h_2 = ak_i$ e $h_2 - h_1 = bk_j$ con $a\,,\, b\,,\, i\,,\, j \in \mathbb{N}$ e $i > j$, $1 \le a \le i$, $1 \le b \le j$. Deve valere inoltre che $(h_m - h_2) + (h_2 - h_1) = h_m - h_1$ appartiene ad $A$, ma ciò è impossibile perché $ak_i < ak_i + bk_j < (a + 1)k_i \le k_{i+1}$ e quindi $ak_i + bk_j$ non appartiene a nessun $A_n$. □

*Nota* 1.4. Esistono sottoinsiemi infiniti $A \subseteq \mathbb{N}$ che non sono $\Delta_f$-set.

*Dimostrazione.* Consideriamo il sottoinsieme $A$ di $\mathbb{N}$ formato dalle potenze di 2; vogliamo mostrare che $A$ non è un $\Delta_f$-set. Supponiamo invece che lo sia, allora esiste $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < h_4\} \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\Delta(H) \subseteq A$; perciò in particolare $h_2 - h_1 = 2^a$, $h_3 - h_2 = 2^b$, $h_4 - h_2 = 2^c$. Vale quindi che $2^a + 2^b = (h_3 - h_2) + (h_2 - h_1) = h_3 - h_1 \in A$ e $2^a + 2^c = (h_4 - h_2) + (h_2 - h_1) = h_4 - h_1 \in A$, però sicuramente uno fra $2^a + 2^b$ e $2^a + 2^c$ non è una potenza di 2 e ciò porta ad un assurdo. □

Enunciamo ora una versione leggermente generalizzata del lemma di Ramsey, che al posto di considerare come insieme di partenza $\mathbb{N}$ considera un generico insieme $X$ infinito. Questa nuova versione si ottiene da quella classica semplicemente considerando una copia di $\mathbb{N}$ in $X$ e applicando Ramsey su di lei.

**Lemma 1.5** (Ramsey generalizzato, versione infinita)**.** *Dato $X$ insieme infinito e $[X]^k = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, esiste $H \subseteq X$ infinito ed esiste $i$ tale che $[H]^k \subseteq C_i$.*

**Lemma 1.6** (Ramsey generalizzato, versione finita)**.** *Dato $X$ insieme infinito, per ogni $k\,,\, r\,,\, m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $Y \subseteq X$ con $|Y| = n$, se $[Y]^k = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ esiste $H \subseteq X$ con $|H| = m$ ed esiste $i$ tale che $[H]^k \subseteq C_i$.*

**Proposizione 1.7.** *Le famiglie dei $\Delta$-set e dei $\Delta_f$-set sono regolari per partizioni.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione ricalca quella del teorema delle distanze in versione infinita e finita rispettivamente.

Sia $X$ un $\Delta$-set e $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ una partizione di $X$, vogliamo dimostrare che esiste $i$ tale che $C_i$ è un $\Delta$-set. Per definizione di $\Delta$-set esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq X$. Possiamo allora partizionare $[H]^2$ nel seguente modo: $[H]^2 = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_r$ con $D_i = \{\{n\,,\, m\} \in [H]^2 \mid m > n \wedge m - n \in C_i\}$.

Per il Lemma 1.5 (Ramsey generalizzato, versione infinita) su $H$ esiste $K \subseteq H$ infinito ed esiste $i$ tali che $[K]^2 \subseteq D_i$. Questo vuol dire che $\Delta(K) = \{k' - k \mid k' > k \in K\} \subseteq C_i$ e perciò $C_i$ è un $\Delta$-set.

Dimostriamo ora invece la regolarità per partizioni dei $\Delta_f$-set. Sia $X$ un $\Delta_f$-set e $X = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ una sua partizione. Analogamente a prima vogliamo mostrare che uno dei $C_i$ è un $\Delta_f$-set.

Per il Lemma 1.6 (Ramsey generalizzato, versione finita), per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che preso un qualsiasi $H \subseteq \mathbb{N}$ con $|H| = n$ e $[H]^2 = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_r$, esiste $K \subseteq H$ con $|K| = m$ e tale che $[K]^2 \subseteq D_i$ per un qualche $i$. Poiché $X$ è un $\Delta_f$-set possiamo scegliere $H$ di cardinalità $n$ tale che $\Delta(H) \subseteq X$ e possiamo considerare $D_i = \{\{n\,,\,m\} \in [H]^2 \mid m > n \wedge m - n \in C_i\}$ come partizione di $[H]^2$. Allora per quando detto esiste $K \subseteq H$ con $|K| = m$ e tale che $[K]^2 \subseteq D_i$, ma ciò analogamente a prima implica che $\Delta(K) \subseteq D_i$ e quindi $C_i$ è un $\Delta_f$-set. □