# Esercizi Ultrafiltri

Gianluca Grilletti

8 marzo 2015

# Indice

# 1 Ultrafiltri

## 1.1 Lezione 1 del 24/2

**Esercizio 1.1.1.** Formalizzare la dimostrazione del seguente lemma:

> Esiste una corrispondenza biunivoca tra ultrafiltri su $I$ e gli ideali massimali dell'anello $\text{Fun}(I, \mathbb{R})$.

*Dimostrazione.* Sia $\mathsf{U}$ l'insieme degli ultrafiltri non principali su $I$ e sia $\mathsf{M} = \text{SpecMax}(\text{Fun}(I, \mathbb{R}))$ l'insieme degli ideali massimali di $\text{Fun}(I, \mathbb{R})$. Scriviamo due mappe $F : \mathsf{U} \to \mathsf{M}$ e $G : \mathsf{M} \to \mathsf{U}$ in modo che siano l'una l'inversa dell'altra.

- Dato $\mathfrak{U} \in \mathsf{U}$ definiamo

$$F(\mathfrak{U}) = \{\phi \in \text{Fun}(I, \mathbb{R}) \mid Z(\phi) \in \mathfrak{U}\}$$

  Mostriamo che $F(\mathfrak{U})$ è un ideale massimale di $\text{Fun}(I, \mathbb{R})$.

  - $F(\mathfrak{U})$ è un ideale in quanto

$$\begin{aligned} \phi, \psi \in F(\mathfrak{U}) &\Rightarrow Z(\phi), Z(\psi) \in \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow Z(\phi - \psi) \supseteq Z(\phi) \cap Z(\psi) \in \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow \phi - \psi \in F(\mathfrak{U}) \\ \forall \psi \in \text{Fun}(I, \mathbb{R}). \Big( \phi \in F(\mathfrak{U}) &\Rightarrow Z(\phi) \in \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow Z(\phi \cdot \psi) \supseteq Z(\phi) \in \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow \phi \cdot \psi \in F(\mathfrak{U}) \Big) \end{aligned}$$

  - Consideriamo l'anello quoziente $A = \text{Fun}(I, \mathbb{R})/F(\mathfrak{U})$ e mostriamo che questo è un campo. Infatti

$$\begin{aligned} [\phi] \in A \setminus \{0\} &\Rightarrow \phi \notin F(\mathfrak{U}) \\ &\Rightarrow Z(\phi) \notin \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow \exists \psi . Z(\psi) = Z(\phi)^c \in \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow [\phi] = [\phi + \psi] \end{aligned}$$

    Notando ora che $\phi + \psi$ è invertibile in $\text{Fun}(I, \mathbb{R})$ in quanto non si annulla in nessun punto, si ha che anche $[\phi + \psi] = [\phi]$ deve essere invertibile. Per genericità di $[\phi] \in A \setminus 0$, segue che $A$ è un campo e quindi $F(\mathfrak{U})$ è massimale.

- Dato $\mathcal{M} \in \mathsf{M}$ definiamo

$$G(\mathcal{M}) = \{J \subseteq I \mid \exists \phi \in \mathcal{M}. Z(\phi) = J\}$$

  $G(\mathcal{M})$ risulta essere un filtro, in quanto

  - $(x \mapsto 0) \in \mathcal{M} \Rightarrow I \in G(\mathcal{M})$
  - $\emptyset \in G(\mathcal{M}) \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{M}. \forall x \in I. \phi(x) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{M} \cap \text{Fun}(I, \mathbb{R})^* \neq \emptyset \Rightarrow \perp$
  - $J_1, J_2 \in G(\mathcal{M}) \Rightarrow \chi_{J_1}, \chi_{J_2} \in \mathcal{G} \Rightarrow \chi_{J_1} + \chi_{J_2} \in \mathcal{G} \Rightarrow J_1 \cap J_2 \in \mathcal{G}$ (qui con $\chi_A$ si intende l'indicatrice dell'insieme $A$)

– $J_1 \in \mathcal{G} \wedge J_2 \supset J_1 \Rightarrow \chi_{J_1} \cdot \chi_{J_2} \in \mathcal{G} \Rightarrow J_2 \in \mathcal{G}$

Inoltre $G(\mathcal{M})$ deve essere necessariamente un ultrafiltro in quanto altrimenti

$$\begin{aligned} J, J^c \notin G(\mathcal{M}) &\Rightarrow \exists \phi, \psi \in \mathcal{M}. Z(\phi) = J \wedge Z(\psi) = J^c \\ &\Rightarrow \phi + \psi \in \mathcal{M} \cap \mathrm{Fun}(I, \mathbb{R})^* \\ &\Rightarrow \perp \end{aligned}$$

Per costruzione $F$ e $G$ sono una l'inversa dell'altra, e questo conclude la dimostrazione. □

**Esercizio 1.1.2.** Formalizzare la dimostrazione del seguente teorema:

> Per ogni filtro $\mathfrak{F}$ esiste un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ che lo contiene. In particolare esistono ultrafiltri non principali.

*Dimostrazione.* Supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia un filtro sull'insieme $I$.

Basta dimostrare che l'insieme dei filtri contenenti $\mathfrak{F}$ è un insieme ordinato induttivo rispetto all'inclusione e la tesi seguirà dal lemma di Zorn. Notiamo infatti che l'insieme di tali filtri è non vuoto ($\mathfrak{F}$ stesso è contenuto in tale insieme).

Sia $(\mathfrak{F}_j)_{j \in J}$ una catena di filtri contenenti $\mathfrak{F}$ e poniamo $\mathfrak{G} = \cup_{j \in J} \mathfrak{F}_j$. Valgono le seguenti:

- $\mathfrak{G}$ è un filtro in quanto:
  - $\forall j \in J. \emptyset \notin \mathfrak{F}_j \Rightarrow \emptyset \notin \mathfrak{G}$
  - $\forall j \in J. I \mathfrak{F}_j \Rightarrow I \in \mathfrak{G}$ (in realtà basterebbe un indice)
  - $I'_1, I'_2 \in \mathfrak{G} \Rightarrow \exists j_1, j_2 \in J. I'_1 \in \mathfrak{F}_{j_1} \wedge I'_2 \in \mathfrak{F}_{j_2} \Rightarrow \exists j. I'_1, I'_2 \in \mathfrak{F}_j \Rightarrow \exists j. I'_1 \cap I'_2 \in \mathfrak{F}_j \Rightarrow I'_1 \cap I'_2 \in \mathfrak{G}$
  - Sia $I'' \supseteq I'$. Allora $I' \in \mathfrak{G} \Rightarrow \exists j \in J. I' \in \mathfrak{F}_j \Rightarrow \exists j \in J. I'' \in \mathfrak{F}_j \Rightarrow I'' \in \mathfrak{G}$
- $\mathfrak{G}$ contiene $\mathfrak{F}$ (perché unione di insiemi contenenti $\mathfrak{F}$).
- $\mathfrak{G}$ è un maggiorante della catena per costruzione.

Segue la tesi. □

**Esercizio 1.1.3.** Dimostrare il teorema di Tychonoff utilizzando la teoria svolta finora a lezione.

*Dimostrazione.* Sia $(K_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici compatti. Vogliamo dimostrare che anche lo spazio prodotto $K = \prod_{i \in I} K_i$ è uno spazio compatto. Per farlo possiamo utilizzare la caratterizzazione introdotta a lezione degli spazi compatti, cioè:

> Uno spazio topologico $X$ è compatto se e solo se per ogni ultrafiltro $\mathfrak{U}$, ogni successione a valori in $X$ ammette $\mathfrak{U}$-limite

Prendiamo allora una successione indicizzata su $(x^j)_{j\in J}$ indicizzata su $J$ a valori in $K$. Essendo una successione di successioni, fissiamo le notazioni: ad apice indicheremo l'indice rispetto alla successione ($x^j$ è il $j$-esimo elemento della successione), a pedice indicheremo l'indice che indica la componente ($x_i^j$ è la componente $i$ del $j$-esimo elemento della successione).

Fissato quindi un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ vogliamo trovare quindi un $x \in K$ candidato limite. Se fossimo in uno $[0,1]^n$ la cosa più naturale da fare sarebbe proiettare sulle componenti la successione, trovare i limiti sulle singole componenti e poi considerare la $n$-upla dei limiti. Procediamo allo stesso modo.

Consideriamo la successione $(x_k^j)_{j\in J}$ a valori nello spazio $K_j$. Poiché $K_j$ è compatto, per la caratterizzazione sopra si ha che esiste un $\mathfrak{U}$-limite per la successione. Poniamo

$$\lim_{\mathfrak{U}} x_k^j = x_k$$

Possiamo quindi considerare un limite per ogni $k \in I$ e costruire l'elemento $x = (x_i)_{i\in I} \in K$. Mostriamo ora che questo è un $\mathfrak{U}$-limite per la successione presa in esame.

$x = \lim_{\mathfrak{U}} x^j$

$\Updownarrow$

$\forall U$ intorno di $x. \left\{j \in J \mid x^j \in U\right\} \in \mathfrak{U}$

$\Updownarrow$ (per proprietà di monoticità degli ultrafiltri e poiché l'insieme sotto è base della topologia)

$\forall U \in \left\{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \text{ intorno di } x_i,\ \text{quasi ogni } U_i = K_i\right\}. \left\{j \in J \mid x_i^j \in U\right\} \in \mathfrak{U}$

$\Updownarrow$

$\forall i \in I. \forall U_i$ intorno di $x_i. \left\{j \in J \mid x_i^j \in U_i\right\} \in \mathfrak{U}$

$\Updownarrow$

$\forall i \in I. x_i = \lim_{\mathfrak{U}} x_i^j$

da cui segue la tesi.

$\square$

## 1.2 Lezione 2 del 2/3

**Esercizio 1.2.1.** Dimostrare il seguente teorema:

Dato $\mathfrak{F}$ filtro su $I$ le seguenti sono equivalenti:

1. $A^c \notin \mathfrak{F} \Rightarrow A \in \mathfrak{F}$
2. $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow \exists i. A_i \in \mathfrak{F}$
3. $\mathfrak{F}$ è filtro massimale

*Dimostrazione.* $1 \Rightarrow 2$ A meno di sostituire $A_i$ con $A_i \setminus \cup_{j<i} A_j$, possiamo supporre che le unioni siano disgiunte. Infatti

$$A_i \setminus \cup_{j<i} A_j \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_i \setminus \cup_{j<i} A_j \subseteq A_i \in \mathfrak{F}$$

Inoltre a meno di sostituire $A_n$ con $A_n \cup (\cup_{j\leq n} A_j)^c$ possiamo supporre che $\cup_{i\leq n} A_i = I$. Infatti si ha (per il punto 1)

$$\begin{aligned}
&A \cup B \in \mathfrak{F} \wedge B \notin \mathfrak{F} \\
&\Rightarrow A^c \cap B^c \notin \mathfrak{F} \wedge B^c \in \mathfrak{F} \\
&\Rightarrow A^c \notin \mathfrak{F} \\
&\Rightarrow A \in \mathfrak{F}
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora il risultato per induzione su $n$. Il passo base è banale, quindi possiamo supporre $n > 1$. Si ha

$$\sqcup_{1\leq i\leq n} = I \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_n \in \mathfrak{F} \vee A_n^c = \sqcup_{1\leq i\leq n-1} A_i \in \mathfrak{F}$$

in particolare, se $A_n \in \mathfrak{F}$ abbiamo la tesi; altrimenti possiamo sostituire l'insieme $A_{n-1}$ con $A'_{n-1} = A_{n-1} \cup A_n$. Per ipotesi induttiva si ha

$$A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_{n-2} \sqcup A'_{n-1} = I \in \mathfrak{F} \Rightarrow \exists i \leq n-2.A_i \in \mathfrak{F} \vee A'_{n-1} \in \mathfrak{F}$$

Nel primo caso si ha la tesi, mentre nel secondo basta notare che $A'_{n-1} = A_{n-1} \sqcup A_n \in \mathfrak{F} \Rightarrow A_{n-1} \in \mathfrak{F}$

$2 \Rightarrow 3$ Supponiamo per assurdo esistano $A \notin \mathfrak{F}$ ed un filtro $\mathfrak{F}'$ tali che $A \in \mathfrak{F}'$ e $\mathfrak{F}'$ estenda $\mathfrak{F}$. Si ha

$$\begin{aligned}
&A \cup A^c = I \in \mathfrak{F} \\
&\Rightarrow A^c \in \mathfrak{F} \\
&\Rightarrow A^c \in \mathfrak{F}' \\
&\Rightarrow \perp
\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$ Supponiamo per assurdo $\mathfrak{F}$ massimale e $A$ tale che $A, A^c \notin \mathfrak{F}$. Consideriamo allora l'insieme

$$\mathfrak{F}' = \{X \subseteq I \mid \exists Y \in \mathfrak{F}.X \supseteq Y \cap A\}$$

si verifica banalmente che questo è un filtro che estende $\mathfrak{F}$ e che inoltre ha $A$ come elemento, contro l'ipotesi di massimalità di $\mathfrak{F}$

□

**Esercizio 1.2.2.** Dati $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ ultrafiltri e dato $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ definiti come a lezione, dimostrare le seguenti:

1. $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ è un ultrafiltro
2. $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ è principale se e soltanto se sia $\mathfrak{U}$ che $\mathfrak{V}$ sono principali
3. $(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}) \otimes \mathfrak{W} = \mathfrak{U} \otimes (\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W})$
4. $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V} \Rightarrow \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \neq \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{U}$

*Dimostrazione.* 1. Per mostrare che $\mathfrak{U}\otimes\mathfrak{V}$ è un ultrafiltro dobbiamo mostrare che:

- $\emptyset \notin \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$

- $A \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \wedge A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$
- $A, B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$
- $A \notin \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$

Le prime due proprietà seguono banalmente dalla definizione. Dimostriamo la terza e la quarta

- $$\begin{aligned} &A, B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \\ &\Rightarrow \{i \in I \mid A_i \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \wedge \{i \in I \mid B_i \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \end{aligned}$$

  In particolare
  - $\{i \in I \mid A_i \in \mathfrak{U}\} \cap \{i \in I \mid B_i \in \mathfrak{U}\} \subseteq \{i \in I \mid A_i \cap B_i \in \mathfrak{U}\}$
  - $\{i \in I \mid A_i \in \mathfrak{U}\} \cap \{i \in I \mid B_i \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V}$

  da cui segue $\{i \in I \mid A_i \cap B_i \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$
- $$\begin{aligned} &A^c \notin \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \\ &\Rightarrow \{i \in I \mid A_i^c \in \mathfrak{U}\} \notin \mathfrak{V} \\ &\Rightarrow \{i \in I \mid A_i^c \notin \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \\ &\Rightarrow \{i \in I \mid A_i \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \\ &\Rightarrow A \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \end{aligned}$$

2. Supponiamo $\mathfrak{U}$ generato da $a \in I$ e $\mathfrak{V}$ generato da $b \in J$. Allora

   $$\begin{aligned} &A \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid A_i \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \\ &\Leftrightarrow b \in \{i \in I \mid a \in A_i\} \\ &\Leftrightarrow a \in A_b \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in A \end{aligned}$$

   da cui segue che $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ è principale.

   Viceversa, supponiamo $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ generato da $(a, b)$. Allora:

   $$\begin{aligned} &A \in \mathfrak{U} \wedge B \in \mathfrak{V} \\ &\Leftrightarrow A \times B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in A \times B \\ &\Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B \end{aligned}$$

3. *mancante*

4. Notiamo che la tesi è banalmente verificata se $I \neq J$ in quanto $I \times J \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{U}$.

   Supponiamo quindi $I = J$. Siano $A \in \mathfrak{U}$ e $B \in \mathfrak{V} \setminus \mathfrak{U}$ (quest'ultimo esiste per ipotesi). Allora

- $A \times B \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$
- $$\begin{aligned} & B \times A \in \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \\ & \Leftrightarrow \{i \in I \mid B \in \mathfrak{U}\} \in \mathfrak{V} \\ & \Leftrightarrow \emptyset \in \mathfrak{V} \\ & \Rightarrow B \times A \notin \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} \end{aligned}$$

da cui la tesi.

□

**Esercizio 1.2.3.** Scrivere la dimostrazione del teorema di Ramsey

*Dimostrazione.* Introduciamo le seguenti notazioni: dati $B, J \subseteq [\mathbb{N}]^k$ con $|J| \leq l$, definiamo $B_J = \{\{x_{l+1} < \cdots < x_k\} \mid \exists x_1, \ldots, x_l. \{x_1 < \cdots < x_k\} \in B\}$. Per non appesantire la notazione, con la scrittura $B_n$ indicheremo l'insieme $B_{\{n\}}$.

Dato un ultrafiltro $\mathfrak{U}$, con $\mathfrak{U}^{\otimes k}$ indicheremo l'ultrafiltro $\underbrace{\mathfrak{U} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{U}}_{k \text{ volte}}$

Il teorema di Ramsey dice

$$\forall r. \forall k. \forall [\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r. \exists H \text{ infinito } . \exists i. [H]^k \subseteq C_i$$

La dimostrazione dei casi $k = 1$ e $k = 2$ è stata già trattata a lezione. Consideriamo ora il caso $k > 1$ generico.

Fissiamo una colorazione $[\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$. Possiamo allora identificare i seguenti insiemi

$$\begin{aligned} [\mathbb{N}]^k &\to \Delta^+ \left\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 < \cdots < n_k\right\} \\ C_i &\to D_i = \{(n_1 < \cdots < n_k) \mid \{n_1, \ldots, n_k\} \in C_i\} \end{aligned}$$

Notiamo in particolare che $\Delta^+ = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$.

Fissiamo ora un ultrafiltro non principale $\mathfrak{U}$ su $\mathbb{N}$ e notiamo che

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}. \Delta_n^+ \text{ cofinito} \\ & \Rightarrow \left\{n \in \mathbb{N} \mid \Delta_n^+ \in \mathfrak{U}^{\otimes(k-1)}\right\} \in \mathfrak{U} \\ & \Rightarrow \Delta^+ \in \mathfrak{U}^{\otimes k} \end{aligned}$$

Dalla caratterizzazione di ultrafiltro segue che

$$D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r = \Delta^+ \in \mathfrak{U} \Rightarrow \exists r_0. D_{r_0} \in \mathfrak{U}$$

Utilizziamo ora il seguente lemma per concludere la dimostrazione:

**Lemma 1.2.1.** *Dato $\mathfrak{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ e $B \in \mu U^{\otimes k}$, esiste $H$ infinito tale che $[H]^k \subseteq B$*

Prendendo infatti $B = D_{r_0}$ si ottiene $H$ infinito tale che $[H]^k \subseteq D_{r_0}$, cioè $H \subseteq C_{r_0}$ come voluto.

Passiamo ora alla dimostrazione del lemma.

*Dimostrazione.* I casi $k = 1, 2$ sono già stati trattati a lezione. Consideriamo ora il caso $k > 1$ generico. Vogliamo costruire iterativamente un insieme $H = \{h_1 < \dots < h_n < \dots\}$ induttivamente in modo che $[H]^k \subseteq B$.

- Definiamo $\widehat{B} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid B_n \in \mathfrak{U}^{\otimes(k-1)}\right\}$ e prendiamo $h_1 \in \widehat{B}$. Notiamo che $B_{h_1} \in \mathfrak{U}^{\otimes(k-1)}$ per costruzione.
- Supponiamo di aver definito l'insieme $H^{(n)} = \{h_1, \dots, h_n\}$ in modo che valga
$$\forall l \leq k.\forall J \subseteq H^{(n)}.|J| = l \to B_J \in \mathfrak{U}^{\otimes(k-l)} \tag{1}$$
Definiamo ora
$$N_J = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{se } |J| = k \\ \left\{n > \max(J) \mid B_{J,n} \in \mathfrak{U}^{\otimes(k-|J|-1)}\right\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$
con la convenzione che $\mathfrak{U}^{\otimes 0} = \{\emptyset\}$ e se $|J, n| = k$ allora $B_{J,n} = \emptyset$. Notiamo che dalla definizione di ultrafiltro tensore segue immediatamente
$$\begin{aligned} &B_J \in \mathfrak{U}^{\otimes(k-l)} \\ &\Rightarrow N_J \in \mathfrak{U} \\ &\Rightarrow B_{n+1} = \widehat{B} \cap \left( \bigcap_{J \in \mathcal{P}H^{(n)}} N_J \right) \in \mathfrak{U} \end{aligned}$$
È immediato ora verificare che preso $h_{n+1} \in B_{n+1}$, l'insieme $H^{(n+1)} = \{h_1 < \dots < h_{n+1}\}$ ha ancora la proprietà (1).

Definiamo quindi $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^{(n)}$ per costruzione è immediato verificare che $H$ è un insieme infinito e presi $h_{j_1}, \dots, h_{j_k} \in H$ si ha $\{h_{j_1}, \dots, h_{j_k}\} \in B$, come voluto.

□

□

### 1.3 Lezione 3 del 3/3

**Esercizio 1.3.1.** Dato $(P, \leq)$ un ordine parziale infinito, esiste $X \subseteq P$ infinito tale che $X$ sia una catena oppure $X$ sia una anticatena (rispetto all'ordinamento indotto da $(P, \leq)$)

*Dimostrazione.* Sia $Q \subseteq P$ un sottoinsieme numerabile di $P$ e consideriamo una sua enumerazione $\{q_0, q_1, \dots\}$. Consideriamo la seguente colorazione di $[Q]^2$:
$$C_1 = \{\{q_i, q_j\} \mid q_i < q_j \lor q_i > q_j\} \tag{2}$$
$$C_2 = \{\{q_i, q_j\} \mid q_i \neq q_j \land q_i \not< q_j \lor q_i \not> q_j\} \tag{3}$$
Per il teorema di Ramsey, esiste $X \subseteq Q$ infinito tale che $[X]^2 \in C_1 \lor [X]^2 \in C_2$. In particolare:

- $[X]^2 \in C_1$ significa che tutti gli elementi di $X$ sono confrontabili tra loro, cioè $X$ è una catena

- $[X]^2 \in C_2$ significa che tutti gli elementi di $X$ non sono confrontabili tra loro, cioè $X$ è una anticatena

$\square$

**Esercizio 1.3.2.** Dimostrare il seguente teorema utilizzando il teorema di compattezza combinatoria

> **[Schur, versione finita.]**
>
> $$\forall r. \exists n. \forall \{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r . \exists \{a < b < a+b\} . \exists i . a, b, a+b \in C_i$$

*Dimostrazione.* Consideriamo $\mathcal{A} = \{\{a < b < a+b\}\}_{a,b \in \mathbb{N}}$. Per il teorema di Schur sappiamo che $\mathcal{A}$ è $r$-regolare su $\mathbb{N}$ per ogni $r$. Dal teorema di compattezza segue che

$$\forall r. \exists Y_r \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}). \mathcal{A} \text{ è } r\text{-regolare su } Y_r$$

Prendendo $\{m \in \mathbb{N} \mid \exists y \in Y. m \leq y\} = \{1, \dots, n\}$ si ha in particolare

$$\begin{aligned} &\forall r. \forall \{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r . \exists i . \exists A \in \mathcal{A}. A \subseteq C_i \\ &\Rightarrow \forall r. \forall \{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r . \exists i . \exists \{a < b < a+b\} \subseteq C_i \end{aligned}$$

$\square$

**Esercizio 1.3.3.** Dimostrare usando il teorema delle distanze nella sua versione finita il seguente lemma

$$\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r . \exists i . \forall m . \exists |B| = m . \Delta(B) \subseteq C_i$$

*Dimostrazione.* Fissato $r$ sappiamo che

$$\forall m . \exists n . \forall \{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r . \exists |H| = m . \exists i . \Delta(H) \subseteq C_i$$

Prendiamo ora una colorazione di $\mathbb{N}$ e fissiamo $m$. Sia $n(m)$ il minimo valore per cui valga la proposizione sopra. Allora posta $\{1, \dots, n(m)\} = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_r$ la colorazione indotta da quella data si ha

$$\exists |H_m| = m . \exists i . \Delta(H_m) \subseteq D_i \subseteq C_i$$

da cui per arbitrarietà di $m$ segue la tesi $\square$

**Esercizio 1.3.4.**
- Trovare un $\Delta_f$-set che non sia un $\Delta$-set
- Trovare un insieme che non sia né un $\Delta$-set né un $\Delta_f$-set
- Dimostrare che le famiglie dei $\Delta$-set e dei $\Delta_f$-set sono regolari per partizioni

*Dimostrazione.*
- Consideriamo il seguente insieme

$$\begin{aligned} F &= \{0\} \sqcup \{2 \cdot i\}_{i=1} \sqcup \{4 \cdot i\}_{i=1,\dots,3} \sqcup \dots \\ &= \{0\} \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1} \left\{ 2^{2^j} \cdot i \right\}_{i=1,\dots,2^{2^j}-1} \right) \end{aligned}$$

Cioè l'insieme dei numeri naturali di seguito rappresentato:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |

Notiamo che i numeri presi in esame diventano sempre più radi. Infatti si può definire la "densità" di $F$ come

$$\begin{aligned}
\delta(F) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|F \cap \{0,\dots,n-1\}\,|}{n} \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>2^{2^j}}} \frac{|F \cap \left\{0,\dots,2^{2^j}-1\right\}|}{n} + \frac{|F \cap \left\{2^{2^j},\dots,n-1\right\}|}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|F \cap \left\{2^{2^j},\dots,n-1\right\}|}{n} \\
&\leq 2^{2^j}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ricava notando che i numeri da $2^{2^j}$ in poi sono multipli di $2^{2^j}$. Per arbitrarietà di $j$, $\delta(F)$ tende quindi a 0, e questo mostra che $F$ non può essere un $\Delta$-set (è chiaro infatti che per un $\Delta$-set la densità deve essere positiva).

D'altra parte è chiaro che $F$ è un $\Delta_f$-set. Si ha infatti che la successione aritmetica di lunghezza $2^{2^j}$

$$\left\{2^{2^j}, 2^{2^j}\cdot 2, \dots, 2^{2^j}\cdot 2^{2^j}\right\}$$

è contenuta in $F$ per ogni $j$, da cui, ancora per arbitrarietà di $j$ segue che $F$ contiene successioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.

- Cerchiamo un insieme $H$ infinito che non sia un $\Delta_f$-set. Possiamo ad esempio costruire un tale insieme ricorsivamente:

  - Scegliamo $h_0 \in \mathbb{N}$ arbitrariamente
  - Supposto di aver costruito $H_n = \{h_0 < \cdots < h_n\}$ in modo che non contenga successioni aritmetiche di lunghezza 3, prendiamo $h_{n+1} \in \{m \in \mathbb{N} \mid \forall h_i \leq h_j \in H_n . m > 2h_j - h_i\}$. È semplice allora verificare che anche l'insieme $H_{n+1} = \{h_0 < \cdots < h_{n+1}\}$ non può contenere successioni aritmetiche di lunghezza 3.

  Definiamo quindi $H = \bigcup H_n$. Anche questo insieme non può contenere successioni aritmetiche di lunghezza 3. Infatti se per assurdo una tale successione esistesse, sarebbe della forma $\{h_i < h_j < h_k = 2h_j - h_i\}$, ma essendo $k > \max\{i,j\}$ per monotonia, segue $h_k > 2h_j - h_i$, un assurdo.

  Per concretezza, un esempio di insieme con la proprietà sopra è $\{n!\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- Diamo la dimostrazione della proposizione nel caso dei $\Delta_f$-set utilizzando il teorema di Ramsey (caso finito). La dimostrazione nel caso dei $\Delta$-set è analoga (a meno di usare il teorema di Ramsey nel caso infinito).

Sia $A$ un $\Delta_f$-set, cioè tale che $\forall n.\exists |H_n| = n.\Delta(H_n) \subseteq A$. Consideriamo una colorazione $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$. Allora questa induce una colorazione su ogni $[H_n]^2$ così definita:

$$\{h < h'\} \in D_i^n \Leftrightarrow h' - h \in C_i$$

Per il teorema di Ramsey (versione finita) si ha inoltre

$$\forall m.\exists n.\forall [H_n]^2 = D_1' \sqcup \cdots \sqcup D_r'.\exists i.\exists H' \subseteq H_n.|H'| = m \wedge [H']^2 \in D_i' \quad (4)$$

Segue quindi che, fissato $m$, si può scegliere $n$ in modo tale che esista $H'$ di cardinalità $m$ omogeneo per la colorazione $\{D_i^n\}$. Dalla definizione di $D_i^n$ segue che

$$\forall h < h' \in H'.h' - h \in C_i \Rightarrow \Delta(H') \subseteq C_i$$

Per arbitrarietà di $m$, segue che un certo $C_k$ conterrà sottoinsiemi della forma $\Delta(H')$ con $|H'|$ grande a piacere, e da questo segue banalmente la tesi.

**Osservazione:** Qui abbiamo utilizzato il teorema di Ramsey (versione finita) in una forma leggermente diversa da come enunciata a lezione. È semplice mostrare che a meno di considerare una bigezione tra $H'$ e $\{0, \ldots, |H'| - 1\}$ vale la Formula (4).

$\square$

**Esercizio 1.3.5.** Trovare una bipartizione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ tale che né $C_1$ né $C_2$ contengano progressioni aritmetiche infinite

*Dimostrazione.* costruiamo un insieme $C$ con le seguenti proprietà:

- Per ogni $n \in N \setminus \{0\}$, esiste un $N$ tale che

$$\{N + 1, N + 2, \ldots, N + 2^n\} \cap C = \emptyset$$

- $C^c$ ha densità asintotica 0, dove con densità asintotica di un insieme di naturali $A$ si intende

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{0, \ldots, n-1\}|}{n}$$

Notiamo che entrambe queste condizioni implicano non contenere successioni aritmetiche infinite.

Un modo intuitivo per definire un insieme come sopra è quello di vedere $\mathbb{N}$ come "unione disgiunta di quadrati" (come mostrato in figura) per scegliere gli elementi di $C$

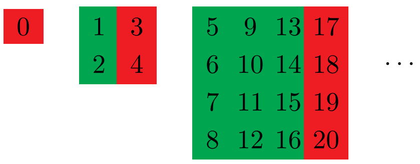
$$\begin{array}{c} 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 5 & 9 & 13 & 17 \\ 6 & 10 & 14 & 18 \\ 7 & 11 & 15 & 19 \\ 8 & 12 & 16 & 20 \end{array} \qquad \cdots$$

Più formalmente, stiamo considerando una bigezione $\phi$ tra $\mathbb{N}$ e l'insieme

$$
\begin{aligned}
&\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le a,b < 2^n\right\} \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times \{0,\dots,2^n-1\} \times \{0,\dots,2^n-1\}
\end{aligned}
$$

dove la terna $(n,a,b)$ rappresenta l'elemento sulla riga $a$-esima e sulla colonna $b$-esima del quadrato $n$-esimo. Indichiamo con $Q_n$ le terne relative al quadrato $n$-esimo.

Definiamo ora $\phi(C)$ (tramite tale bigezione) come gli elementi rappresentati in verde nella figura seguente cioè




$$
\begin{aligned}
\phi(C) &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{n\} \times \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le a < 2^n, 0 \le b < 2^n - 1\right\} \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{n\} \times \{0,\dots,2^n-1\} \times \{0,\dots,2^n-2\}
\end{aligned}
$$

Dalla costruzione fatta è ovvio che $C$ ha la proprietà richiesta. Inoltre notiamo che

$$
\begin{aligned}
\phi(C^c) &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{n\} \times \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \le a < 2^n, 0 \le b = 2^n - 1\right\} \\
&= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{n\} \times \{0,\dots,2^n-1\} \times \{2^n-1\}
\end{aligned}
$$

ha densità 0. Infatti

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \frac{|C^c \cap \{0,\dots,n-1\}|}{n} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{|\phi(C^c) \cap \bigsqcup_{j=0}^n Q_j|}{\sum_{j=0}^n 2^{2j}} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^n 2^j}{2^{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{2n}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Segue la tesi.

□

**Esercizio 1.3.6.** Usando il teorema di compattezza combinatoria dimostrare i seguenti:

- La versione infinita del teorema delle distanze implica la versione finita del teorema delle distanze
- Il teorema di Ramsey in versione infinita implica il teorema delle distanze nella sua versione finita

*Dimostrazione.*

- La versione infinita del teorema delle distanze dice

  $$\forall r.\forall [\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r.\exists H \text{ infinito}.\exists i.\Delta(H) \subseteq C_i$$

  Fissati $m$ ed $r$ consideriamo la famiglia di insiemi finiti

  $$\mathcal{A} = \left\{\Delta(H_m) \subseteq [\mathbb{N}]^2 \mid |H_m| = m\right\}$$

  Consideriamo inoltre una enumerazione $j : [\mathbb{N}]^2 \to \mathbb{N}$. Quest'ultima induce una colorazione su $\mathbb{N}$ le cui classi sono $D_i = j(C_i)$. Notiamo in particolare che $j$ induce una bigezione tra le $r$-colorazioni di $[\mathbb{N}]^2$ e di $\mathbb{N}$ e che vale la proprietà

  $$A \subseteq C_i \Leftrightarrow j(A) \subseteq D_i \tag{5}$$

  Per la versione infinita del teorema delle distanze, la famiglia $\mathcal{A}$ è $r$-regolare su $[\mathbb{N}]^2$. Sfruttando la proprietà (5) si deduce che la famiglia $j(\mathcal{A})$ è $r$-regolare su $\mathbb{N}$.

  Per il teorema di compattezza si ha quindi che esiste $Y \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $j(\mathcal{A})$ è $r$-regolare su $Y$.

  Segue che $\mathcal{A}$ è $r$-regolare su $j^{-1}(Y)$, e quindi anche su ogni $Z \supseteq j^{-1}(Y)$. Consideriamo un $n \in \mathbb{N}$ tale che $[\{0, \ldots, n\}]^2 \supseteq j^{-1}(Y)$

  Per arbitrarietà di $m$ ed $r$ si ricava:

  $$\forall r.\forall m.\exists n.\forall \{0, \ldots, n\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r.\exists |H_m| = m.\exists i.\Delta(H_m) \subseteq C_i$$

  cioè la versione finita del teorema delle distanze.

- La versione infinita del teorema di Ramsey dice

  $$\forall r.\forall k.\forall [\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r.\exists H \text{ infinito}.\exists i.[H]^k \subseteq C_i$$

  Fissati $k$ ed $r$ consideriamo la famiglia di insiemi finiti

  $$\mathcal{A} = \left\{[H_m]^k \subseteq [\mathbb{N}]^k \mid |H_m| = m\right\}$$

  Consideriamo inoltre una enumerazione $j : [\mathbb{N}]^k \to \mathbb{N}$ che come nel caso precedente induce una mappa tra le colorazioni $D_i = j(C_i)$. Come sopra, questa mappa è una bigezione tra le colorazioni e vale

  $$A \subseteq C_i \Leftrightarrow j(A) \subseteq D_i \tag{6}$$

  Applicando la versione infinita del teorema di Ramsey a $\mathcal{A}$ e applicando il teorema di compattezza a $j(\mathcal{A})$ si ha quindi che esiste $Y \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $j(\mathcal{A})$ è $r$-regolare su $Y$, e quindi un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{A}$ è $r$-regolare su $[\{0, \ldots, n\}]^k$.

  Per arbitrarietà di $r$ e $k$ si ricava:

  $$\forall r.\forall k.\exists n.\forall [\{0, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r.\exists |H_m| = m.\exists i.[H_m]^k \subseteq C_i$$

  cioè la versione finita del teorema di Ramsey.

□