Esercizi per il corso "Ultrafiltri e Metodi Non-Standard"

Gioacchino Antonelli

March 7, 2015

Esercizio: *Determinare una 2-colorazione di $\mathbb{N}$ di modo che non esistano progressioni aritmetiche infinite monocromatiche.*

Dimostrazione: Con un procedimento diagonale è possibile numerare gli elementi di $\mathbb{N}^2$, ovvero le coppie ordinate di numeri naturali. In effetti, dato $i \in \mathbb{N}$, esiste certamente un $a \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a(a+1)}{2} = \sum_{j=1}^{a} j < i \leq \sum_{j=1}^{a+1} j = \frac{(a+2)(a+1)}{2}$$

La funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ tale che

$$s(i) := \left(i - \frac{a(a+1)}{2}, \frac{(a+2)(a+1)}{2} - i \right)$$

è chiaramente una bigezione per come è stata costruita. Si intenderà da ora in poi, con la scrittura $s(\cdot)_1$ e $s(\cdot)_2$, rispettivamente la prima e la seconda componente della coppia $s(\cdot)$. Definisco ricorsivamente, per $n \in \mathbb{N}$, (ponendo $k_1 = 1$)

$$x_1 = s(1)_1 + s(1)_2$$
$$y_1 = s(1)_1 + 2s(1)_2$$
$$k_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} | s(n+1)_1 + ks(n+1)_2 > y_n\}$$
$$x_{n+1} = s(n+1)_1 + k_{n+1}s(n+1)_2$$
$$y_{n+1} = s(n+1)_1 + (k_{n+1}+1)s(n+1)_2$$

Chiaramente $y_n > x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per costruzione $x_{n+1} > y_n$. Sia $C := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ e si consideri la 2-colorazione $\mathbb{N} = C \sqcup (\mathbb{N} \setminus C)$.

Considero una qualunque progressione aritmetica infinita $a + hb$, con a e b fissati e $h = 0, 1, \ldots$. Essendo s una funzione surgettiva esiste un certo j tale che $s(j) = (a, b)$. Il numero $a + k_j b$, che fa parte della progressione, è in C, essendo x_j. D'altra parte $a + (k_j + 1)b$ non è in C eppure appartiene alla progressione aritmetica: il risultato è che qualsiasi progressione aritmetica infinita si scelga, essa non può essere monocromatica.

Esercizio: *Sia $(A, \leq)$ un insieme infinito parzialmente ordinato. Mostrare che o esiste una catena infinita (i.e. un sottoinsieme infinito di A totalmente* *ordinato) o esiste una anticatena infinita (i.e. un sottoinsieme infinito di A con elementi a due a due non confrontabili).*

Dimostrazione: Essendo l'insieme A infinito, esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. $A_{\mathbb{N}} := f(\mathbb{N})$, dunque, è un sottoinsieme numerabile di A e pertanto $A_{\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Sia

$$C_1 := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | a_i \quad \text{e} \quad a_j \quad \text{sono confrontabili}\}$$

e sia

$$C_2 := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | a_i \quad \text{e} \quad a_j \quad \text{non sono confrontabili}\}$$

Chiaramente $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup C_2$ e dunque per la versione di Ramsey Infinita esiste H infinito tale che $[H]^2 \subseteq C_i$ per $i = 1$ o $i = 2$. Se $i = 1$, allora tutte le coppie di elementi di A i cui indici sono in H sono confrontabili, e dunque formano una catena. Altrimenti, formano un'anticatena e in entrambi i casi la cardinalità della catena o anticatena è infinita, essendo H infinito.

Essendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ultrafiltri su I e J rispettivamente, resta definito in tal modo l'ultrafiltro prodotto su $I \times J$:

$$I \times J \supseteq A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i \in I | \{j \in J | (i,j) \in A\} \in V\} \in U$$

E' immediato verificare che questa è una buona definizione, ovvero $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è proprio un ultrafiltro. Dove necessario si indicherà $A_i = \{j \in J | (i,j) \in A\}$. In generale, spesso sottintenderò l'appartenenza degli indici al loro insieme, essendo chiaro che gli indici indicati con i apparterranno a un insieme I e gli indici indicat con j apparterranno a un insieme J (insiemi su cui sono definiti gli ultrafiltri).

Esercizio: *Valgono le seguenti proprietà sul prodotto di ultrafiltri:*

- *$\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è ultrafiltro principale se e solo se sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ lo sono.*
- *Se $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sono ultrafiltri su I, J, K rispettivamente, vale $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$.*
- *Se $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.*

Dimostrazione:

- ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale, esistono $a \in I$ e $b \in J$ tali che $A = \{(a,b)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Voglio mostrare che $\{b\} \in \mathcal{V}$ e $\{a\} \in \mathcal{U}$. Suppongo per assurdo che $\{b\} \notin \mathcal{V}$. Dalla definizione ho che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i | A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. D'altra parte $A_i = \emptyset \quad \forall i \in I$ poiché $\{b\} \notin \mathcal{V}$ e dunque, essendo anche $\emptyset \notin \mathcal{V}$ (infatti le possibili sezioni A_i possono essere solo $\{b\}$ o $\emptyset$), avrei $\emptyset \in \mathcal{U}$, che è assurdo. Ora, si ha che $\{i | A_i \in \mathcal{V}\} = \{a\}$ e dunque dalla definizione ho che $\{a\} \in \mathcal{U}$ come volevo mostrare. Dalla chiusura per insiemi superiori ottengo che sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ sono ultrafiltri principali.

($\Leftarrow$) Se sia $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ sono principali, esistono a e b tali che $\{a\} \in \mathcal{U}$ e $\{b\} \in \mathcal{V}$. Voglio mostrare che $A = \{(a,b)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. D'altra parte $A_i = \{b\}$ se $i = a$ ed è vuoto altrimenti. Dunque $\{i|A_i \in \mathcal{V}\} = \{a\} \in \mathcal{U}$ e ciò mostra, proprio per definizione, che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ e dunque quest'ultimo, vista la chiusura per insiemi superiori, è un filtro principale.

- Per comodità di notazione si sottintenderà che i, j e k appartengono a I, J e K. $A \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} \Leftrightarrow B = \{(i,j)|A_{(i,j)} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Leftrightarrow \{i|B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i|\{j|A_{(i,j)} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$.

  Inoltre $A \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) \Leftrightarrow \{i|A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i|\{j|(A_i)_j \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$.

  A meno dell'identificazione $A_{(i,j)} = (A_i)_j$ che discende direttamente dal fatto che è possibile identificare le terne $((i,j),k)$ e $(i,(j,k))$, l'associatività è evidente perché le definizioni sono assolutamente equivalenti fra loro.

- Se $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ esiste $A \in \mathcal{U}$ con $A \notin \mathcal{V}$. Mostro che $I \times A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti $\{i \in I|\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} \in \mathcal{V}\} = \emptyset$ poiché $\forall i \in I$, $\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} = A \notin \mathcal{V}$. Siccome $\emptyset \notin \mathcal{U}$, direttamente dalla definizione, $I \times A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. D'altra parte $I \times A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ poiché $\forall i$, $\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} = A \in \mathcal{U}$ e dunque $\{i \in I|\{j \in I|(i,j) \in I \times A\} \in \mathcal{U}\} = I \in \mathcal{V}$ e dunque dalla definizione stessa $I \times A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. Dunque $I \times A$ è in $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ ma non in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ che quindi non possono essere uguali.