# Esercizi lezione 3/3/15, Andrea Vaccaro

7 marzo 2015

**Proposizione 0.1.** *Sia* $(P, \leq)$ *un insieme parzialmente ordinato infinito, esiste allora una catena infinita o un'anticatena infinita.*

*Dimostrazione.* Senza perdere di generalità posso considerare $P$ numerabile (a meno di prenderne un sottoinsieme), quindi posso identificarlo con $\mathbb{N}$ (come insieme, non come insieme ordinato). Considero allora la partizione di $[\mathbb{N}]^2$ data da $C_1 = \{\{x, y\} : x <_P y \vee y <_P x\}$ e $C_2 = \{\{x, y\} : x \not<_P y \wedge y \not<_P x\}$ (per gli insiemi coppia qui indicati vale sempre $x \neq y$, poiché elementi di $[\mathbb{N}]^2$). Per il teorema di Ramsey (versione infinita), esiste un $X \subseteq P$ infinito tale che $[X]^2 \subseteq C_1$ oppure $[X]^2 \subseteq C_2$.

Nel caso valga $[X]^2 \subseteq C_1$, allora tutti gli elementi di $X$ sono confrontabili fra loro, dunque $X$ è una catena infinita, se invece vale $[X]^2 \subseteq C_2$, si vede che $X$ è un'anticatena infinita. $\square$

**Proposizione 0.2.** *Dal teorema delle distanze (versione finita) ricavare che per ogni partizione di* $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ *esiste* $i$ *tale che* $\Delta(B) \subseteq C_i$ *per insiemi finiti* $B$ *arbitrariamente grandi.*

*Dimostrazione.* Fissiamo una partizione su $\mathbb{N}$, diciamo $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$. Per ogni segmento iniziale della forma $\{1, \cdots n\}$ chiamiamo $C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_r^n$ la partizione indotta (eventualmente qualche $C_i^n$ sarà vuoto). Chiaramente, per ogni $n$, un sottoinsieme di $C_i^n$ sarà anche un sottoinsieme di $C_i$. Ora, per ogni $m$ esiste un $n$ tale che si può trovare un $H \subseteq \{1, \cdots n\}$ di cardinalità $m$ tale che $\Delta(H) \subseteq C_i^n$ e dunque in $C_i$ per un certo $i$. Quindi a ogni $m$ si può associare uno dei $C_i$ in base a dove possiamo trovare $\Delta(H)$; poiché l'operazione può esser fatta per infiniti $m$, e $r$ è finito, per il teorema di Ramsey ci sarà un $C_i$ associato a infiniti $m$ (quindi a $m$ arbitrariamente grandi). $\square$

**Proposizione 0.3.** *Verificare che dalla versione infinita del teorema di Schur segue la versione finita.*

*Dimostrazione.* Ragioniamo per assurdo. Supponiamo esista $r$ tale che per ogni $n$ vi sia una partizione $\{1, \cdots, n\} = C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_1^n$ tale per cui non esistano $a < b < a + b$ dello stesso colore. Sia allora $U$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Sia ora $x \in \mathbb{N}$, definisco $\Lambda_i(x) = \{n : x \in C_i^n\}$. Si verifica che $\Lambda_1(x) \cup \cdots \cup \Lambda_r(x) = \{n : n \geq x\}$, dunque deve appartenere ad $U$ in quanto cofinito. Poiché $U$ è ultrafiltro, esisterà un unico $i$ tale che $\Lambda_i(x) \in U$ (i $\Lambda_i(x)$ sono disgiunti), e si dirà che $x$ ha colore $i$.

Definisco ora la partizione $\mathbb{N} = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$ dove $D_i = \{x : x \text{ ha colore } i\}$ Per la versione infinita del teorema di Schur esistono $a < b < a+b$ tali da essere tutti in un $D_i$, ovvero $\Lambda_i(x) \in U$ per $x = a, b, a + b$. Considero allora l'insieme $\Lambda_i(a) \cap \Lambda_i(b) \cap \Lambda_i(a + b) \in U$ e in esso scelgo un elemento $\hat{n}$. Considero allora $\{1, \cdots, \hat{n}\} = C_1^{\hat{n}} \sqcup \cdots \sqcup C_r^{\hat{n}}$. Per costruzione però, $n \in \Lambda_i(x)$ se e solo se $x \in C_i^n$. Ma allora abbiamo che $a < b < a + b \in C_i^{\hat{n}}$ contro le ipotesi. $\square$

**Proposizione 0.4.** *Dimostrare che:*

*i) esiste un insieme che è $\Delta_f$-set ma non $\Delta$-set*

*ii) esiste un insieme che non sia $\Delta_f$-set*

*iii) Le famiglie dei $\Delta$-set e dei $\Delta_f$-set sono regolari perpartizioni*

*Dimostrazione. i.* Costruiamo un insieme $A$ in modo che sia un $\Delta_f$- set. Definiremo una serie di insiemi $A_n$ finiti per $n \geq 2$, e porremo $A = \bigcup A_n$. L'idea è che ogni $A_m$ sarà $\Delta(H_m)$ per un opportuno $H_m$ di cardinalità $m$, in questo modo ovviamente $A$ sarà un $\Delta_f$-set. Possiamo definire gli $A_i$ in modo induttivo: sia $A_2 = \{1\}$ (quindi ad esempio $H_2 = \{1, 2\}$). Dati gli $A_j$ per $j \leq k$, sia $x$ il massimo di $\bigcup_{j=2}^{k} A_j$. Definiamo allora $A_{k+1} = \{i(2x + 1) : 1 \leq i \leq k\}$, quindi $H_{k+1}$ in questo caso potrebbe essere un qualunque insieme di $k + 1$ multipli di $2x + 1$ consecutivi.

Mostriamo che $A$ non è un $\Delta$-set per concludere. Supponiamo vi sia $H$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$. Poiché $H$ infinito, riesco a trovare $h_i < h_j < h_k$ tali che $f = h_j - h_i \in A_n$ e $g = h_k - h_j \in A_m$ con $m \neq n$ (questo perché fissati $h_i < h_j$, essendo $H$ infinito e $A_n$ finito, prima o poi posso trovare $h_k$ la cui distanza da $h_j$ sia maggiore del massimo di $A_n$). Vale ovviamente che $g + f = h_k - h_i \in A$; supponiamo $m > n$, ecco che allora per costruzione, il più piccolo elemento in $A$ dopo $g$ (che sia ancora in $A_m$ o in $A_{m+1}$ non fa differenza) dista da $g$ sicuramente almeno $2f + 1$ (esattamente $2f + 1$ se $m = n + 1$ e se $f$ è il massimo di $A_n$). Ma allora $f + g \notin A$, che quindi non può essere un $\Delta$-set.

*ii.* Considero un singoletto qualunque. Per $m = 3$, qualunque insieme $H$ di cardinalità 3 avrà necessariamente un insieme delle distanze di cardinalità almeno 2. Siano $h_1 < h_2 < h_3$ i suoi elementi. Se $d(h_1, h_2) \neq d(h_2, h_3)$ allora $H$ ha sicuramente almeno 2 elementi. Se $d(h_1, h_2) = d(h_2, h_3)$, allora $d(h_1, h_3) = 2d(h_1, h_2) \neq d(h_1, h_2)$ poiché $h_1 \neq h_2$, quindi il singoletto non può essere un $\Delta_f$ set.

*iii.* Sia $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ un $\Delta$-set. Sia $H$ insieme infinito testimone del fatto che $A$ è $\Delta$-set. Consideriamo la partizione $[H]^2 = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$ con $D_i = \{\{n < m\} : m - n \in C_i\}$. Poiché $H$ infinito, per il teorema di Ramsey esiste $K$ infinito tale che $[K]^2 \subseteq D_i$ per un certo $i$. Ma allora $C_i$ è un $\Delta$-set poiché $\Delta(K) \subseteq C_i$.

Sia ora $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ un $\Delta_f$-set. Mostreremo che per ogni $m$ esiste un $C_i$ e un $K$ di cardinalità $m$ tale che $\Delta(K) \subseteq C_i$. Fatto ciò, vi sarà uno dei $C_j$ che verrà utilizzato per infiniti $m$, e lui sarà il nostro $\Delta_f$-set, perché ovviamente se per ogni $m$ esiste $n \geq m$ tale che vi sia un $K$ di cardinalità $n$ con $\Delta(K) \subseteq C_j$, allora prendendo un sottoinsieme $K'$ di $m$ elementi in $K$, avremo ancora che $\Delta(K') \subseteq C_j$.

Fissiamo allora $m$. Poiché abbiam fissato a monte anche $r$, il teorema di Ramsey finito ci fornisce un $n$ tale che per ogni partizione possibile di $[\{1, \cdots, n\}]^2 = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$, esiste un suo sottoinsieme $J$ di cardinalità $m$ tale che $[J]^2$ sia omogeneo. Fissato tale $n$, poiché $A$ è un $\Delta_f$-set, troviamo un $H$ di cardinalità $n$ tale che $\Delta(H) \subseteq A$. Mettendo in bigezione $H$ con $\{1, \cdots, n\}$, a partire dalla partizione $[H]^2 = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$ con $D_i = \{\{x < y\} : x - y \in C_i\}$, viene indotta una partizione $[\{1, \cdots, n\}]^2 = D'_1 \sqcup \cdots \sqcup D'_r$. Troviamo quindi $J$ di taglia $m$ in $\{1, \cdots, n\}$ tale che $[J]^2 \subseteq D'_i$ per un certo $i$. Se prendiamo la controimmagine mediante la bigezione di $H$ con $\{1, \cdots, n\}$, otteniamo ancora un insieme di taglia $m$, che chiameremo ancora $J$, con $[J]^2 \subseteq D_i$. Ma allora $\Delta(J) \in C_i$, e dunque abbiamo concluso. $\square$

**Proposizione 0.5.** *Trovare partizione in 2 colori di $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ tale che nessuno dei $C_i$ contenga successioni aritmetiche infinite.*

*Dimostrazione.* Definisco 2 famiglie di intervalli di $\mathbb{N}$, $A_i$ e $B_i$ con $i \in \mathbb{N}$. $A_{i+1}$ sarà un segmento lungo $i+1$ che comincia dal successore del massimo di $B_i$. Analogamente $B_i$ sarà un segmento lungo $i$ che comincia dal successore dell'ultimo elemento di $A_i$. Come passo base definiamo $A_1 = \{1\}$. Siano $C_1 = \bigcup A_i$ e $C_2 = \bigcup B_i$

Sia ora una progressione aritmetica $a + kb$ con $k \in \mathbb{N}$ contenuta (ad esempio) in $C_1$. Se consideriamo $A_j$ col minimo $j$ tale che $j \geq b$ e che vi sia un elemento della progressione in $A_j$, sia $p$ il più grande elemento della successione in $A_j$, e $q$ il più piccolo in $A_{j+1}$. La distanza fra i 2 è strettamente maggiore di $b$, per costruzione, perciò in mezzo vi sarà certamente un altro elemento della progressione, che allora sarà in $B_j$, dunque non in $C_1$. In modo analogo si vede che nessuna progressione aritmetica infinita è contenuta in $C_2$. $\square$

**Proposizione 0.6.** *Dimostrare che dale teorema delle distanze infinito segue la versione finita, e che dal teorema di Ramsey infinito segue la versione finita, tramite il teorema di compattezza combinatoria.*

*Dimostrazione.* Vediamo il caso del teorema delle distanze. Il teorema nella sua versione infinita ci dice che, per ogni $r$, la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ $\mathcal{A} = \{\Delta(H) : H \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito}\}$ è $r$-regolare su $\mathbb{N}$. In particolare, per ogni $m$, anche $\mathcal{A}_m = \{\Delta(H) : H \subseteq \mathbb{N} \wedge |H| = m\}$ è $r$-regolare per ogni $r$ (per ogni partizione basta prendere i primi $m$ elementi dell'$H$ fornito dal teorema delle distanze infinito), oltre ad essere una famiglia di insiemi finiti. Quindi, fissati $r$ ed $m$, il teorema di compattezza combinatoria ci fornisce un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ (ovvero un segmento iniziale) tale che $\mathcal{A}_m$ vi sia $r$-regolare.

Passiamo ora al teorema di Ramsey. La sua versione infinita ci dice che per ogni $k$ e ogni $r$, $\mathcal{A}_k = \left\{[H]^k : H \subseteq \mathbb{N} \text{ infinito}\right\}$ è $r$- regolare su $[\mathbb{N}]^k$. Come prima, per ogni $k$, $r$ ed $m$, anche $\mathcal{A}_{k,m} = \left\{[H]^k : H \subseteq \mathbb{N} \wedge |H| = m\right\}$ è $r$- regolare su $[\mathbb{N}]^k$ (di nuovo prendo i primi $m$ elementi dell'$H$ fornito dalla versione infinita del teorema) oltre che composto da insiemi finiti. Dunque fissati $k$, $r$ ed $m$, il teorema di compattezza combinatoria fornisce un insieme $[\{1 \cdots, n\}]^k$ su cui $\mathcal{A}_{k,m}$ sia $r$-regolare. $\square$