Esercizio 1

Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$, definisco

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } A \in \mathcal{U} \end{cases}$$

verificare che μ è una misura finitamente additiva su $\mathbb{N}$.

Soluzione

Siano $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{N}$, disgiunti. $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } A_1 \cup \dots \cup A_n \notin \mathcal{U} \\ 1 & \text{se } A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{U} \end{cases}$

Per le proprietà di ultrafiltro si ha

$$A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{U} \iff \exists! i \ A_i \in \mathcal{U}$$

da cui $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \forall i \ A_i \notin \mathcal{U} \iff \forall i \ \mu(A_i) = 0 \\ 1 & \text{se } \exists! j \ A_j \in \mathcal{U} \iff \mu(A_j) = 1 \wedge \forall i \neq j \ \mu(A_i) = 0 \end{cases}$

Perciò $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$

Esercizio 2

Esiste una corrispondenza tra gli ultrafiltri su I e gli ideali massimali di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{R})$. Verificare che, dato $\mathcal{M}$ ideale massimale di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{R})$, si ha

$\mathcal{U} = \{ \mathrm{Ker}(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{M} \}$ ultrafiltro su I.

Soluzione

Filtro: i) $I \in \mathcal{U}$, infatti $f \equiv 0$ appartiene a $\mathcal{M}$ e $\mathrm{Ker}(f) = I$.

ii) Siano $A, B \in \mathcal{U}$, allora $A \cap B \in \mathcal{U}$. Infatti $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_B) =$

$= \mathrm{Ker}(\varphi_A^{-1} \cdot \varphi_A + \varphi_B^{-1} \cdot \varphi_B) = A \cap B$, dove $g^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) = 0 \\ \frac{1}{g(x)} & \text{se } g(x) \neq 0 \end{cases}$

iii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \notin \mathcal{U}$, infatti se $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = A$ e per assurdo $\exists \varphi_{A^c} \in \mathcal{M}$ tale che $\mathrm{Ker}(\varphi_{A^c}) = A^c$ avrei $\mathcal{M} = \mathrm{Fun}(I, \mathbb{R})$ in quanto $f \equiv 1$ è

$f = \varphi_A^{-1} \varphi_A + \varphi_{A^c}^{-1} \varphi_{A^c}$, dove $g^{-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) = 0 \\ \frac{1}{g(x)} & \text{se } g(x) \neq 0 \end{cases}$

iv) $A \in \mathcal{U}$ e $B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$, infatti se $\mathrm{Ker}\,\varphi_A = A$ allora, detta χ_B la funzione indicatrice di B, si ha $\mathrm{Ker}(\varphi_A \cdot \chi_{B^c}) = B$

Ultrafiltro: Sia $A \notin \mathcal{U}$ allora $A^c \in \mathcal{U}$: vedo che, detta $\varphi_A \in \mathrm{Fun}(I, \mathbb{R})$ tale che $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = A$, si ha $\varphi_A \notin \mathcal{M}$ e, per massimalità di $\mathcal{M}$, $f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } \varphi(x) \neq 0 \\ 1 & \text{se } \varphi(x) = 0 \end{cases}$ tale che $f \in (\mathcal{M}, \varphi_A)$. Ma allora $\exists g \in \mathcal{M}$ tale che $g + \varphi_A = f$,

cioè $g = f - \varphi_A = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi(x) \neq 0 \\ 1 & \text{se } \varphi(x) = 0 \end{cases}$. Ma $\mathrm{Ker}(g) = A^c$. Quindi $A^c \in \mathcal{U}$.

Esercizio 3

Usando: "X è compatto se e solo se $\forall\, \mathcal{U}$ ultrafiltro su X e $\forall\, \{x_i\}_{i\in I}$ esiste $y = \mathcal{U}\text{-}\lim x_i$" dimostrare che il prodotto di spazi compatti è compatto.

Soluzione

Sia $X = \prod_{J\in \mathcal{J}} X_J$ tale che $\forall J \in \mathcal{J}$ X_J è compatto. Voglio dimostrare che presa una qualunque succesione $\{x_i\}_{i\in I}$ di elementi di X, per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X si ha che $\exists\, y = \mathcal{U}\text{-}\lim_{i\in I} x_i$. Considero x_i^J, proiezione di x_i su X_J. So che, per ogni $\mathcal{V}_J$, ultrafiltro su X_J esiste $y_J \in X_J$ tale che $y_J = \mathcal{V}_J\text{-}\lim_{i\in I} x_i^J$. In particolare, considero $\mathcal{U}_J = \{x^J \mid x \in \mathcal{U}\}$ e dico che questi sono ultrafiltri (posponiamo la verifica). Allora affermo che $y = (y_J)_{J\in \mathcal{J}} \in X$ è $y = \mathcal{U}\text{-}\lim_{i\in I} x_i$. Sia A un intorno di y in X; WLOG posso assumere che sia $A = \prod_{J\in J_0} A_J \times \prod_{J\in \mathcal{J}\setminus J_0} X_J$, con $J_0 \subseteq \mathcal{J}$ finito. Allora le x_i tali che $x_i \in A$ sono quelle tali per cui $x_i^J \in A_J$ $\forall J \in J_0$. Ma questa è l'intersezione $\bigcap_{J\in J_0} \{x_i \mid x_i^J \in A_J\}$; per ipotesi $\forall J \in J_0$ $\{x_i^J \in A_J\} \in \mathcal{U}_J$ e quindi $\{x_i \mid x_i^J \in A_J\} \in \mathcal{U}$, da cui finalmente

$$\bigcap_{J\in J_0} \{x_i \mid x_i^J \in A_J\} \in \mathcal{U}$$

Vediamo dunque che $\mathcal{U}$ ultrafiltro $\Rightarrow \mathcal{U}_J$ ultrafiltro:

i) $X_J \in \mathcal{U}_J$ in quanto $X \in \mathcal{U}$ e la proiezione è surgettiva

ii) $B \in \mathcal{U}_J \Rightarrow B^c \notin \mathcal{U}_J$: esiste $C \in \mathcal{U}$ tale che $C = \{x \mid x^J \in B\}$; se fosse $B^c \in \mathcal{U}_J$ avrei $C' \in \mathcal{U}$ tale che $C' = \{x \mid x^J \notin B\}$. Ma allora avrei $C \cap C' = \emptyset \in \mathcal{U}$. Assurdo.

iii) $B_1 \in \mathcal{U}_J$ e $B_2 \in \mathcal{U}_J \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}_J$: siano $C_1, C_2 \in \mathcal{U}$ come sopra, ho $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}$ e quindi $(C_1 \cap C_2)_J = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}_J$

iv) $B \in \mathcal{U}_J$ e $B' \supseteq B \Rightarrow B' \in \mathcal{U}_J$: sia ancora C come sopra. Sia C' tale che $C' \supseteq C$ e $C'_J = B'$. Allora $C' \in \mathcal{U}$ e $C'_J \in \mathcal{U}_J$

v) $B \notin \mathcal{U}_J \Rightarrow B^c \in \mathcal{U}_J$: sia C tale che $C_J = B$, allora $C \notin \mathcal{U}$. Quindi $C^c \in \mathcal{U}$, ma $C^c_J = B^c \in \mathcal{U}_J$.

Esercizio 4

Dimostrare le seguenti proprietà del prodotto tensoriale di Ultrafiltri:

i) $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ è un ultrafiltro

ii) $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ è principale se e solo se $\mathcal{U},\mathcal{V}$ principali

iii) $(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\otimes\mathcal{W}=\mathcal{U}\otimes(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$

iv) $\mathcal{U}\neq\mathcal{V}\Rightarrow\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}\neq\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}$

Soluzione

i) Devo verificare le seguenti:

1) $I\times J\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$: Ho che, fissato i, $\{j\in J\mid (i,j)\in I\times J\}=J\in\mathcal{V}$ quindi $\{i\in I\mid J\in\mathcal{V}\}=I\in\mathcal{U}$.

2) $A,B\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$: fissato i ho $(A\cap B)_i=\{j\in J\mid (i,j)\in A\cap B\}=$

$=\{j\in J\mid (i,j)\in A\}\cap\{j\in J\mid (i,j)\in B\}=A_i\cap B_i$

Quindi $\{i\in I\mid (A\cap B)_i\in\mathcal{V}\}=\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\}\cap\{i\in I\mid B_i\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$

perché intersezione di insiemi in $\mathcal{U}$

3) $A\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V},\ B\supseteq A\Rightarrow B\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$: $B_i=\{j\in J\mid (i,j)\in B\}\supseteq A_i$, per cui

$A_i\in\mathcal{V}\Rightarrow B_i\in\mathcal{V}$, cioè $\{i\in I\mid B_i\in\mathcal{V}\}\supseteq\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$.

E quindi $\{i\in I\mid B_i\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$

4) $A\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}\Rightarrow A^c\notin\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$: $(A^c)_i=\{j\in J\mid (i,j)\in A^c\}=(A_i)^c$, quindi

$\{i\in I\mid (A^c)_i\in\mathcal{V}\}=\{i\in I\mid (A_i)^c\in\mathcal{V}\}=\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\}^c\notin\mathcal{U}$.

5) $A\notin\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}\Rightarrow A^c\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$: $(A^c)_i=\{j\in J\mid (i,j)\in A^c\}=(A_i)^c$, quindi

$\{i\in I\mid (A^c)_i\in\mathcal{V}\}=\{i\in I\mid (A_i)^c\in\mathcal{V}\}=\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\}^c\in\mathcal{U}$.

ii) $\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\mathcal{U}=\langle u\rangle$ e $\mathcal{V}=\langle v\rangle$. Allora $\langle (u,v)\rangle=\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$, infatti se $A\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ allora $\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$, quindi $u\in\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\}$, da cui $A_u\in\mathcal{V}$, cioè $v\in\{j\in J\mid (u,j)\in A\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}=\langle (u,v)\rangle$, allora $\mathcal{U}=\langle u\rangle$ e $\mathcal{V}=\langle v\rangle$. Infatti se $A\in\mathcal{U}$, allora $A\times J\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$, da cui $(u,v)\in A\times J$. Idem per $B\in\mathcal{V}$.

iii) $A\in(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\otimes\mathcal{W}\Leftrightarrow\bar{A}=\{(i,j)\in I\times J\mid A_{i,j}\in\mathcal{W}\}\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}\Leftrightarrow\{i\in I\mid \bar{A}_i\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\{i\in I\mid A_i\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}\}\in\mathcal{U}\Leftrightarrow A\in\mathcal{U}\otimes(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$

iv) Sia WLOG $A\in\mathcal{U}$, $A\notin\mathcal{V}$ e siano $\mathcal{U},\mathcal{V}$ entrambi ultrafiltri su I (altrimenti è banale). Allora $A\times I\notin\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$, infatti $(A\times I)_i=\{j\in I\mid (i,j)\in A\times I\}=A$ e $\{i\in I\mid A\in\mathcal{V}\}=\emptyset\notin\mathcal{U}$ mentre $\{i\in I\mid A\in\mathcal{U}\}=I\in\mathcal{V}$, per cui $A\times I\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}$

Esercizio 5

Dimostrare nel caso $k=3$ e nel caso generale il teorema di Ramsey infinito

Solvzione

$k=3$. Identifico $[\mathbb{N}]^3$ con $\Delta^+ = \{(n_1,n_2,n_3) \mid n_1<n_2<n_3\}$. Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro su $\mathbb{N}$. Chiamo $\mathcal{V} = \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$. Verifico che:

1) $\Delta^+ \in \mathcal{V}$

2) $\forall X \in \mathcal{V}\ \exists H$ infinito tale che $\{(h_1,h_2,h_3) \mid h_1<h_2<h_3 \in H\} \in \mathcal{V}$

1) $\Delta^+ \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \{(n,m) \mid \Delta^+_{n,m} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$, ma $\Delta^+_{n,m} = \{\ell \mid (n,m,\ell) \in \Delta^+\} = (m,+\infty)$ se $m>n$ e dunque, in quanto cofinito, $\Delta^+_{n,m} \in \mathcal{U}$. Bisogna quindi controllare che l'insieme delle coppie (n,m) con $n<m$ appartenga a $\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$, ma è precisamente quanto dimostrato nel caso $k=2$.

2) Sia $X \in \mathcal{V} = \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$. Sia $\hat{X} = \{n \mid X_n \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Prendo $h_1 \in \hat{X}$. Ora, $X_{h_1} \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$, dunque posso definire $\hat{X}_{h_1} = \{n \mid X_{h_1,n} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Allora prendo $h_2 \in \hat{X} \cap \hat{X}_{h_1} \cap (h_1,+\infty)$. Quindi $X_{h_1,h_2}, \hat{X}_{h_2} \in \mathcal{U}$. Ora posso prendere $h_3 \in \hat{X} \cap \hat{X}_{h_1} \cap \hat{X}_{h_2} \cap X_{h_1,h_2} \cap (h_2,+\infty)$ e così via. Si avrà

$$h_\ell \in \hat{X} \cap \bigcap_{n<\ell} \hat{X}_{h_n} \cap \bigcap_{n<m<\ell} X_{h_n,h_m} \cap (h_{\ell-1},+\infty)$$

e $\forall \ell\ h_\ell \in \mathcal{U}$. Allora $H = \{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è l'insieme omogeneo infinito.

k generico: È del tutto analogo. Per costruire la successione di h_i, avrò:

$$h_\ell \in \hat{X} \cap \bigcap_{n_1<n_2<\dots<n_{k-1}<\ell} X_{h_{n_1},\dots,h_{n_{k-1}}} \cap \bigcap_{\substack{h_{n_1}<\dots<h_{n_m}<h_{\ell-1} \\ m<\min(k,\ell)}} \hat{X}_{h_{n_1},\dots,h_{n_m}} \cap (h_{\ell-1},+\infty)$$

e $\hat{X}_{h_{n_1},\dots,h_{n_m}} = \{s \mid X_{h_{n_1},\dots,h_{n_m},s} \in \bigotimes^{k-m-1} \mathcal{U}\}$

Nota

Scusate la grafia in questo frangente ma ho temporaneamente cambiato medium.

Esercizio 6

Sia $(P, \leq)$ un poset infinito. Allora o esiste $X \subseteq P$ catena infinita o esiste $Y \subseteq P$ antacatena infinita

Soluzione

Considero $[P]^2 = C_1 \cup C_2$, dove $C_1 = \{\{x_1, x_2\} \mid x_1 \leq x_2 \vee x_2 \leq x_1\}$ e C_2 è il suo complementare. Per il teorema di Ramsey infinito, esiste $H \subseteq P$ infinito con $[H]^2 \subseteq C_1$ o $[H]^2 \subseteq C_2$. Nel primo caso ho H catena infinita e nel secondo H anticatena infinita.

Esercizio 7

Dimostrare il teorema di Schur, versione finita, a partire dalla versione infinita à la "Ramsey infinito $\Rightarrow$ Ramsey finito".

Soluzione

Procediamo per assurdo: $\exists r\, \forall n\ \{1, \dots, n\} = C_1^n \cup \dots \cup C_r^n$ t.c. $\forall i\ \nexists\, a < b < a+b \in C_i^n$

Fisso un ultrafiltro <u>non</u> principale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$. Sia $x \in \mathbb{N}$ e considero $\Lambda_i(x) = \{n \mid x = C_i^n\}$. Allora $\Lambda_1(x) \cup \dots \cup \Lambda_r(x) = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, da cui $\exists!\, i$ con $\Lambda_i(x) \in \mathcal{U}$. Sia dunque $\mathbb{N} = D_1 \cup \dots \cup D_r$ con $D_i = \{x \mid \Lambda_i(x) \in \mathcal{U}\}$.

Per Schur versione infinita esiste i ed esistono $a < b < a+b \in D_i$.

Sia $Z = \{a, b, a+b\}$, $Z \in D_i$, allora $\forall x \in Z\ \Lambda_i(x) \in \mathcal{U}$. Prendo $\bar{n} \in \left(\bigcap_{x \in Z} \Lambda_i(x)\right) \neq \emptyset$. Allora $Z \subseteq C_i^{\bar{n}}$ ma $a, b, a+b \in Z \in C_i^{\bar{n}}$. Assurdo.

Nota
forse devo chiedere $n > x$:
$\Lambda_i(x) = \{n > x \mid x \in C_i^n\}$
Quindi $\bigsqcup \Lambda_i(x) = (x, +\infty)$

Esercizio 8

Trovare un insieme che sia un Δ_f-set ma <u>non</u> un Δ-set e trovare un insieme infinito che <u>non</u> sia un Δ_f-set.

Nota
Se l'insieme che <u>non</u> è Δ_f può essere finito, allora è una banalità.

Soluzione

MANCA

Esercizio 9

Le famiglie di Δ-Sets e di Δ_f-Sets sono regolari per partizioni

Soluzione

Cominciamo a dimostrarlo per $\mathcal{U} = \{\Delta\text{-sets di } \mathbb{N}\}$. Voglio che, se $A \in \mathcal{U}$ e $A = C_1 \cup \dots \cup C_r \Rightarrow \exists i\ C_i \in \mathcal{U}$. Uso Ramsey: partiziono $[H]^2 = D_1 \cup \dots \cup D_r$, dove $H \subseteq A$ è infinito e tale che $\Delta(H) \subseteq A$ e, se $h_1 < h_2$, $\{h_1, h_2\} \in D_i \Leftrightarrow h_2 - h_1 \in C_i$. Ho che $\exists i\ \exists H'$ infinito t.c. $H' \subseteq H$ e $[H']^2 \subseteq D_i$, ovvero $\Delta(H) \subseteq C_i$, cioè $C_i \in \mathcal{U}$.

Proviamo a fare un ragionamento analogo per $\mathcal{B} = \{\Delta_f\text{-sets di } \mathbb{N}\}$. Se $B \in \mathcal{B}$ t.c. $B = C_1 \cup \dots \cup C_r$ voglio che $\exists i$ t.c. $C_i \in \mathcal{B}$, ovvero: $\forall m\ \exists n \geq m\ \exists |H| = n\ \ \Delta(H) \subseteq C_i$. Fisso m. Per Ramsey finito esiste $\bar{n}$ tale che, se $|K| \geq \bar{n}$ e $[K]^2 = D_1 \cup \dots \cup D_r$ allora $\exists i\ \exists |K'| = m\ \ K' \subseteq K$ e $[K']^2 \subseteq D_i$. Prendo dunque $|K| \geq \bar{n}$, $K \subseteq B$, tale che $\Delta(K) \subseteq B$, che so esistere per ipotesi, e se $k_1 < k_2$, pongo $\{k_1, k_2\} \in D_i \Leftrightarrow k_2 - k_1 \in C_i$. Trovo quindi $K' \subseteq K$ con $|K'| = m$ e $[K']^2 \subseteq D_i$ per un certo i, ovvero $\Delta(K') \subseteq C_i$. Quindi $C_i \in \mathcal{B}$.

Esercizio 10

Trovare $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $\mathbb{N} = C_1 \cup C_2$ tali che né C_1 né C_2 siano AP-rich.

Soluzione

Siano $C_1 = \{0, 2, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, \dots\}$, ovvero $C_1 = \bigcup_{n \geq 1} \{n^2 - n, \dots, n^2 - 1\}$

e sia C_2 il suo complementare: $C_2 = \bigcup_{n \geq 1} \{n^2, \dots, n^2 + n - 1\}$.

Allora per ogni passo d esiste un buco troppo lungo, sia in C_1 sia in C_2. Formalmente, $\forall d\ \exists \bar{n}$ t.c. $d < ((\bar{n}^2 - 1) - (\bar{n}^2 - \bar{n})) = ((\bar{n}^2 + \bar{n} - 1) - \bar{n}^2) = \bar{n} - 1$.

Nota
mi sembra giusto, forse c'è un modo più elegante di descrivere C_1 e C_2.

Esercizio 11

Usando il principio di compattezza dimostrare le versioni finite dei seguenti teoremi, derivandole dalle versioni infinite:

i) Ramsey

ii) Distanze

Soluzione

i) Cerco una famiglia di insiemi finiti che sia r-regolare su $[\mathbb{N}]^k$. Vedo che: $\mathcal{A} = \{[H]^k \mid |H| = m\}$ soddisfa le mie ipotesi. Per il principio di compattezza esiste $X \subset [\mathbb{N}]^k$ tale che X è finito (diciamo $|X| = n$) e $\mathcal{A}$ è r-regolare su X. Ma, visto che r, k, m erano arbitrari questo equivale ad aver dimostrato che $\forall r, k, m \; \exists |X| = n \;\; X = C_1 \cup \dots \cup C_r$ $\exists i \; \exists |H| = m$ t.c. $[H]^k \subseteq C_i$.

Nota
non è proprio la tesi di Ramsey finita ma credo che si possa aggiustare prendendo $\bar{n} = \max X$ e $\{1, \dots, \bar{n}\}^k$

ii) In questo caso considero $\mathcal{A} = \{\Delta(H) \mid |H| = m\}$ che è r-regolare su $\mathbb{N}$ per il teorema delle differenze, versione infinita. Per il principio di compattezza esiste $X \subset \mathbb{N}$ tale che $|X| = n$ e $\mathcal{A}$ è r-regolare su X. Questo significa che $\forall \; X = C_1 \cup \dots \cup C_r \; \exists i \; \exists |H| = m \;\; \Delta(H) \in C_i$.

Nota
come sopra, si aggiusta.