Esercizi del Corso “Ultrafiltri e Metodi Non Standard”

Federico Glaudo

6 marzo 2015

1 Prodotto tensoriale

Parlando di un sottoinsieme A di un prodotto finito di insiemi $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, con la notazione $A_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ indicheremo la sezione, cioè

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \{(i_{k+1}\,,\ \ldots\,,\ i_n) \in I_{k+1} \times \cdots \times I_n : (i_1\,,\ \ldots\,,\ i_k\,,\ i_{k+1}\,,\ \ldots\,,\ i_n) \in A\}\ .$$

Inoltre dato $A \subseteq I \times J$, ed un ultrafiltro $\mathcal{V}$ su J (che sarà implicito quando verrà usata questa notazione), indicheremo con $\hat{A}$ l'insieme

$$\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\}\ .$$

Definizione 1.1. Dati due ultrafiltri $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sugli insiemi di indici I e J, definiamo il prodotto tensore tra i due ultrafiltri, denotato da $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, come l'insieme che contiene tutti gli $A \subseteq I \times J$ tali che $\hat{A} \in \mathcal{U}$.

Proposizione 1.2. *Il prodotto tensore tra ultrafiltri è un ultrafiltro sul prodotto degli insiemi di indici.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{U}\,,\ \mathcal{V}$ due ultrafiltri sugli insiemi $I\,,\ J$. Verifichiamo che il prodotto tensore rispetta tutte le proprietà di un ultrafiltro. È banale notare che $\emptyset \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

Siano $A\,,\ B$ generici sottoinsiemi di $I \times J$. Verifichiamo la proprietà di sovrainsieme e dell'intersezioni su questi due insiemi.

Se $A \subseteq B$. Allora, essendo $\mathcal{V}$ un filtro, è evidente che $\hat{A} \subseteq \hat{B}$ e perciò se $\hat{A} \in \mathcal{U}$ allora anche $\hat{B} \in \mathcal{U}$, quindi se $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ allora anche $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ e ciò equivale alla chiusura per sovrainsiemi.

Sfruttando il fatto che $\mathcal{V}$ è un filtro, è facile ricavare la catena d'uguaglianze

$$\begin{aligned}\widehat{A \cap B} &= \{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} = \{i \in I : A_i \cap B_i \in \mathcal{V}\} = \\ &= \{i \in I : A_i \in \mathcal{V} \wedge B_i \in \mathcal{V}\} = \hat{A} \cap \hat{B}\,,\end{aligned}$$

da cui è banale ricavare che se $A\,,\ B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ allora $A \cap B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

Abbiamo mostrato che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un filtro e finora abbiamo sfruttato le sole proprietà di filtro di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$[1]. Per concludere verifichiamo che se $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ allora $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, ottenendo così la massimalità di $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Per le proprietà di ultrafiltro di $\mathcal{V}$, vale $\widehat{A^{\mathsf{c}}} = (\hat{A})^{\mathsf{c}}$ e quindi, essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, dall'ipotesi $\hat{A} \notin \mathcal{U}$ deduciamo $\widehat{A^{\mathsf{c}}} \in \mathcal{U}$ come sperato. $\square$

[1] Da questo si deduce che il prodotto tensore è un'operazione interessante anche tra filtri, ma noi ci interessiamo unicamente agli ultrafiltri.

Proposizione 1.3 (Associatività). *Il prodotto tensore tra ultrafiltri è un'operazione associativa.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ ultrafiltri rispettivamente su I , J , K. Esplicitiamo la legge di appartenenza a $\mathcal{U}\otimes(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$

$$\begin{aligned} A\in\mathcal{U}\otimes(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}) &\iff \{i\in I : A_i\in\mathcal{V}\otimes\mathcal{W}\}\in\mathcal{U} \\ &\iff \{i\in I : \{j\in J : A_{ij}\in\mathcal{W}\}\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U} \end{aligned}$$

e la legge di appartenenza a $(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\otimes\mathcal{W}$

$$\begin{aligned} A\in(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\otimes\mathcal{W} &\iff \{(i\,,\,j)\in I\times J : A_{ij}\in\mathcal{W}\}\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V} \\ &\iff \{i\in I : \{j\in J : A_{ij}\in\mathcal{W}\}\in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}\,. \end{aligned}$$

Poichè l'ultima equivalenza delle due appartenenze coincide, deduciamo che $A\in\mathcal{U}\otimes(\mathcal{V}\otimes\mathcal{W})$ se e solo se $A\in(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\otimes\mathcal{W}$ e quindi che tali insiemi sono uguali. □

Nota 1.4 (Non commutatività). Dati due ultrafiltri *distinti* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ sul medesimo insieme I, gli insiemi $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}$ sono distinti.

Dimostrazione. A meno di scambiare $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, possiamo assumere che esista $A\subseteq I$ appartenente a $\mathcal{U}$ ma non a $\mathcal{V}$. Ne segue che di certo $A^{\mathsf{c}}\in\mathcal{V}$. Consideriamo allora l'insieme $A\times A^{\mathsf{c}}$. Tale insieme appartiene, per la definizione stessa di prodotto tensore, a $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ e altrettanto facilmente *non* appartiene a $\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}$, mostrando così che tali insiemi sono distinti. □

Teorema 1.5. *Fissato un ultrafiltro* non principale $\mathcal{U}$ *su* $\mathbb{N}$ *ed un intero positivo* $k\in\mathbb{N}$, *sia* $A\subseteq\mathbb{N}^k$ *un insieme appartenente all'ultrafiltro* $\mathcal{U}\otimes\cdots\otimes\mathcal{U}$, *dove il prodotto tensore è fatto* k *volte. Allora esiste una successione crescente di numeri naturali* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tale che, per ogni scelta di* k *numeri naturali* $n_1<n_2<\cdots<n_k$, *vale* $(h_{n_1}\,,\;\ldots\;,\,h_{n_k})\in A$.

Dimostrazione. Dato un generico $B\subseteq\mathbb{N}^m$, con la notazione $\hat{B}$ intenderemo *sempre* un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, cioè B sarà visto come un sottoinsieme di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{m-1}$ e su $\mathbb{N}^{m-1}$ considereremo l'ultrafiltro $\mathcal{U}\otimes\cdots\otimes\mathcal{U}$, con il prodotto tensore fatto m volte, per definire l'operatore cappuccio. Questa precisazione è necessaria perché altrimenti la definizione dell'operatore cappuccio risulta ambigua nei prodotti tra più di due insiemi.

Costruiamo ricorsivamente una successione di interi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed una famiglia $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che rispettino le seguenti proprietà:

- $h_n<h_{n+1}$,
- $h_n\in T_{n-1}$,
- $T_n\in\mathcal{U}$,
- $T_n=\hat{A}\cap\left(\bigcap_{0<i_1<n}\widehat{A_{h_{i_1}}}\cap\cdots\cap\bigcap_{0<i_1<\cdots<i_{k-2}<n}\widehat{A_{h_{i_1}\cdots h_{i_{k-2}}}}\right)\cap\bigcap_{0<i_1<\cdots<i_{k-1}<n}A_{h_{i_1}\cdots h_{i_{k-1}}}\,.$

Iniziamo scegliendo arbitrariamente $h_1 \in \hat{A}$ e ponendo $T_1 = \hat{A}$. È chiaro tale scelta rispetta tutte le richieste.

Assumiamo di essere riusciti a costruire $h_1\,,\ \ldots\,,\ h_{n-1}$ e $T_1\,,\ \ldots\,,\ T_{n-1}$ in modo che rispettino tutte le richieste. Visto che $T_{n-1} \in \mathcal{U}$ per ipotesi induttiva, T_{n-1} è in particolare un insieme infinito e quindi possiamo scegliere h_n in T_{n-1} che sia maggiore di h_{n-1}. Definendo T_n come imposto dalla quarta richiesta, resta solo da dimostrare che $T_n \in \mathcal{U}$.

Essendo T_n definito come un'intersezione finita di insiemi, mostrare che T_n appartiene ad $\mathcal{U}$ è equivalente a dimostrare che tutti gli insiemi di cui è l'intersezione appartengono ad $\mathcal{U}$. Ma gli insiemi che intersecati danno T_n o sono presenti anche nell'intersezione che definisce T_{n-1}, e quindi appartengono ad $\mathcal{U}$ per ipotesi induttiva, oppure sono della forma $\widehat{A_{h_{i_1}\cdots h_{i_m}h_n}}$ oppure senza il cappuccio se $m = k-2$. Vogliamo perciò dimostrare che gli insiemi di questo tipo appartengono ad $\mathcal{U}$.

Fissiamo $m < k-1$ e $i_1 < i_2 < \cdots < i_m < n$. Visto che $h_n \in T_{n-1}$, allora $h_n \in \widehat{A_{h_{i_1}\cdots h_{i_m}}}$ e quindi, per la definizione dell'operatore cappuccio, deve valere

$$A_{h_{i_1}\cdots h_{i_m}h_n} \in \mathcal{U} \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}\,. \tag{1.1}$$

dove il prodotto tensore è fatto $k-1-m$ volte. Se $m = k-2$ abbiamo già concluso perché l'Equazione (1.1), visto che il prodotto tensore è fatto 0 volte, è proprio l'appartenenza cercata. Se invece $m < k-2$, l'Equazione (1.1) implica, per la definizione dell'operatore cappuccio, che $\widehat{A_{h_{i_1}\cdots h_{i_m}h_n}} \in \mathcal{U}$ e ciò conclude.

Ora rimane da verificare che la successione $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appena costruita rispetti le richieste dell'enunciato. Scelti $n_1 < \cdots < n_k$, per costruzione $h_{n_k} \in A_{h_{n_1}\cdots h_{n_{k-1}}}$ e ciò equivale ad affermare che $(h_{n_1}\,,\ \ldots\,,\ h_{n_k}) \in A$, cioè la richiesta iniziale. $\square$