Esercizio 1. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su un insieme I. Allora sono equivalenti le seguenti proprietà:

1. $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$;

2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in F \Rightarrow \exists i \; A_i \in \mathcal{F}$;

3. $\mathcal{F}$ è massimale.

Soluzione. $1 \Rightarrow 2$) Se per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ si avesse $A_i \notin \mathcal{F}$, allora $A_i^C \in \mathcal{F} \; \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Di conseguenza

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C \in \mathcal{F}$$

da cui l'assurdo.
$2 \Rightarrow 3$) Suppongo che $\mathcal{F}$ sia contenuto in un filtro $\mathcal{G}$ e dimostro che in realtà devono essere uguali. Sia $A \in \mathcal{G}$; allora $I = A \cup (I \setminus A) = A \cup A^C \in \mathcal{F}$. Poiché $A^C \in \mathcal{F} \subseteq G$ dà un assurdo ($A, A^C \in \mathcal{G}$) deve essere necessariamente che $A \in \mathcal{F}$.
$3 \Rightarrow 1$) Se esistesse $A \subset I$ tale che $A, A^C \notin F$, potremmo estendere il filtro $\mathcal{F}$ ad un filtro che lo contiene e che contiene l'insieme A (e dunque che contiene $\mathcal{F}$ propriamente). $\mathcal{F}$ ed A generano un filtro poiché le intersezioni finite del tipo

$$A \cap F_1 \cap \cdots \cap F_n, \quad F_i \in \mathcal{F}$$

sono non vuote, dato che ciò implicherebbe $\mathcal{F} \ni F_1 \cap \cdots \cap F_n \subseteq A^C$ e dunque $A^C \in \mathcal{F}$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. $\mathcal{U}$ non è principale;

2. Se $F \subset I$ è finito, allora $F \notin \mathcal{U}$;

3. $\mathcal{U}$ estende il filtro di Frechet $Fr = \left\{ A \subseteq I \;\middle|\; A^C \text{ è finito} \right\}$.

Soluzione. $1 \Rightarrow 2$) Se fosse $F = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{i_1\} \cup \{i_2\} \cup \cdots \cup \{i_n\} \in \mathcal{U}$, allora esisterebbe j tale che $\{i_j\} \in \mathcal{U}$, cioè si avrebbe che $\mathcal{U}$ è l'ultrafiltro principale generato da i_j.
$2 \Rightarrow 3$) Poiché nessun insieme finito appartiene ad $\mathcal{U}$, tutti gli insiemi cofiniti devono appartenere ad $\mathcal{U}$.
$3 \Rightarrow 1$) Se $\mathcal{U}$ fosse principale, conterebbe un insieme finito (il singoletto che lo genera), ma anche il suo complementare che appartiene al filtro di Frechet, da cui l'assurdo.

Esercizio 3. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i filtri su $\mathbb{N}$ e gli ideali dell'anello $A = \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ data da:

$$F \text{ filtro } \longrightarrow \{ \, f \in A \mid Z(f) \in F \, \} = \mathcal{I}_F$$

$$I \text{ ideale} \longrightarrow \{ \, Z(f) \mid f \in \mathcal{I} \, \} = \mathscr{F}_I$$

dove $Z(f) = \{ \, n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0 \, \}$. Inoltre in questa corrispondenza si ha una bigezione tra ultrafiltri su $\mathbb{N}$ e ideali massimali di A.

Soluzione. Verifichiamo prima di tutto che le operazioni siano ben definite, cioè che $\mathcal{I}_F$ sia un ideale di A e che $\mathscr{F}_I$ sia un filtro su $\mathbb{N}$.

Definisco, per $f \in A$:

$$\tilde{f} = \begin{cases} \frac{1}{f(n)} & f(n) \neq 0 \\ 0 & f(n) = 0 \end{cases}$$

e noto che $f\tilde{f} \in A$ è a valori in $\{ 0, 1 \}$ e che $Z(f) = Z(f\tilde{f})$.

$\mathscr{F}_I$ è un filtro: infatti

- $\emptyset \notin \mathscr{F}_I$. Infatti se I è un ideale proprio per ogni $f \in I$ si deve avere che $Z(f) \neq \emptyset$, altrimenti si avrebbe $f\tilde{f} \equiv 1 \in I$.

- $\mathbb{N} \in \mathscr{F}_I$ poiché $0 \in I$ e $Z(0) = \mathbb{N}$.

- Siano $A \subseteq B$ con $A \in \mathscr{F}_I$. Ciò significa che $A = Z(f)$ con $f \in I$. Allora, considerata $g \in A$ tale che $g(n) = 0$ se $n \in B$ e $g(n) = 1$ altrimenti, si ha $Z(g) = B = Z(fg)$ e poiché $fg \in I$ si conclude che anche $B \in \mathscr{F}_I$.

- Siano $A, B \in \mathscr{F}_I$ e siano $f, g \in I$ tali che $A = Z(f)$ e $B = Z(g)$. Allora

  $$A \cap B = Z(f) \cap Z(g) = Z(f\tilde{f}) \cap Z(g\tilde{g}) = Z(f\tilde{f} + g\tilde{g}).$$

  Poiché $f\tilde{f} + g\tilde{g} \in I$, si ha $A \cap B \in \mathscr{F}_I$.

$\mathcal{I}_F$ è un ideale di A. Infatti:

- $0 \in \mathcal{I}_F$ perché $Z(0) = \mathbb{N} \in F$.

- Se $f, g \in \mathcal{I}_F$, allora $Z(f) \in F$ e $Z(g) \in F$ e pertanto $Z(f) \cap Z(g) \in F$. Quindi $Z(f) \cap Z(g) \subseteq Z(f + g) \in F$ e perciò $f + g \in \mathcal{I}_F$.

- Sia $f \in \mathcal{I}_F$ e $g \in A$. Allora $Z(f) \in F$ e $Z(f) \subseteq Z(fg) \in F$, dunque $fg \in \mathcal{I}_F$.

Quindi le operazioni sono ben definite e dalla definizione segue che sono una l'inversa dell'altra.

Dimostro ora l'ultima parte dell'asserto. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ e dimostro che $\mathcal{I}_\mathcal{U}$ è un ideale massimale. Sia $g \notin \mathcal{I}_\mathcal{U}$, cioè $Z(g) \notin \mathcal{U}$; perciò si ha $Z(g)^C \in \mathcal{U}$ e dunque esiste $f \in \mathcal{I}_\mathcal{U}$ tale che $Z(f) = Z(g)^C$. Allora $f\tilde{f} + g\tilde{g} \equiv 1$ e pertanto $(g, \mathcal{I}_\mathcal{U}) = A$. Sia ora $M \subset A$ un ideale massimale e dimostro che $\mathscr{F}_M$ è un ultrafiltro. Sia $B \notin \mathscr{F}_M$; voglio dimostrare che $B^C \in \mathscr{F}_M$. Si ha che per ogni $f \in A$ tale che $Z(f) = B$, vale $f \notin M$. Allora, per una tale f, si ha $(f, M) = A$, cioè esistono $h \in A$ e $g \in M$ tali che $fh + g = 1$. Pertanto $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$, cioè $Z(g) \subseteq Z(f)^C = B^C$, da cui la tesi, poiché $Z(g) \in \mathscr{F}_M$ e $\mathscr{F}_M$ è un filtro.

Esercizio 4 (Teorema di Tychonoff). Sia I una famiglia di indici e siano $\{ X_i \}_{i \in I}$ spazi topologici compatti. Allora lo spazio $X = \prod_{i \in I} X_i$ dotato della topologia prodotto è compatto.

Soluzione. Utilizzo la caratterizzazione degli spazi topologici compatti: uno spazio X è compatto se e solo se per ogni insieme di indici I e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, ogni successione $(x_i)_{i\in I} \subseteq X$ ammette $\mathcal{U}$-limite.

Sia dunque J un insieme di indici, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su J e $(x_j)_{j\in J} \subseteq X$ una successione in X. Siano inoltre, per ogni $i \in I$, π_i la proiezione sull'i-esimo fattore e $x_j^{(i)} = \pi_i(x_j)$. Si trova dunque che, per ogni $i \in I$, $(x_j^{(i)})_{j\in J} \in X_i$ è una successione indiciata da J e pertanto, per ipotesi, ammette $\mathcal{U}$-limite; sia $y^{(i)}$ un tale limite. Se dunque $y \in X$ è l'elemento tale che $\pi_i(y) = y^{(i)}$ per ogni $i \in I$, voglio dimostrare che la successione (x_j) ammette y come $\mathcal{U}$-limite.

Sia dunque U un intorno di y in X. Noto che posso supporre che U sia un aperto di una base: infatti, gli aperti di una base contenenti y sono un sistema fondamentale di intorni di y e ogni intorno V di Y contiene uno di questi aperti, V'. A questo punto per concludere basta osservare che $\{ j \in J \mid x_j \in V' \} \subseteq \{ j \in J \mid x_j \in V \}$ e che se $\{ j \in J \mid x_j \in V' \} \in \mathcal{U}$ allora anche $\{ j \in J \mid x_j \in V \} \in \mathcal{U}$.

Pertanto posso scrivere $U = \prod_{i\in I} U_i$ dove gli U_i sono aperti di X_i e solo un numero finito di essi è diverso da X_i (è una base della topologia). Quindi, per ogni $i \in I$, $\pi_i(U) = U_i$ è un aperto di X_i contenente $y^{(i)}$ e dunque è un intorno di $y^{(i)}$. Considero gli insiemi $J_i = \left\{ j \in J \;\middle|\; x_j^{(i)} \in U_i \right\}$: per quanto detto, solo un numero finito di essi è un sottoinsieme proprio di J e si ha che per ogni $i \in I$, $J_i \in \mathcal{U}$. In particolare, dunque,

$$\bigcap_{i\in I} J_i \in \mathcal{U}.$$

Per concludere, basta dimostrare che $\{ j \in J \mid x_j \in U \} = \bigcap_{i\in I} J_i$. Ma

$$k \in \{ j \in J \mid x_j \in U \} \iff x_k \in U \iff \forall\, i \in I,\ x_k^{(i)} \in U_i \iff \forall\, i \in I,\ k \in J_i.$$

Esercizio 5. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su un insieme I e $\mathcal{V}$ un ultrafiltro su J. Definiamo il prodotto tensoriale $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ come l'insieme degli elementi $A \subseteq I \times J$ tali che $\{ i \in I \mid A_i \in \mathcal{V} \}$, dove $A_i = \{ j \in J \mid (i, j) \in A \}$.
Dimostrare che:

i) $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro su $I \times J$;

ii) $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale $\iff$ $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono principali;

iii) $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$;

iv) Se $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

Soluzione.

i) Dimostro le proprietà che caratterizzano un ultrafiltro.

- $\emptyset \notin \mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$. Infatti $\emptyset_i = \emptyset \notin \mathcal{V}$ per ogni $i \in I$, dunque $\emptyset = \{ i \in I \mid \emptyset_i \in \mathcal{V} \} \notin \mathcal{U}$.
- $I \times J \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti $(I \times J)_i = J \in \mathcal{V}$ per ogni $i \in I$ e

$$I = \{ i \in I \mid (I \times J)_i \in \mathcal{V} \} \in \mathcal{U}.$$

- $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti

$$B_i = \{ j \in J \mid (i,j) \in B \} \supseteq \{ j \in J \mid (i,j) \in A \} = A_i$$

  dunque $A_i \in \mathcal{V} \Rightarrow B_i \in \mathcal{V}$. Conseguentemente

$$\{ i \in I \mid A_i \in \mathcal{V} \} \subseteq \{ i \in I \mid B_i \in \mathcal{V} \} \in \mathcal{U}$$

  e dunque $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
- $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Rightarrow A^C \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti si avrebbe $\{ i \in I \mid A_i \in \mathcal{V} \} \notin \mathcal{U}$, e poiché $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro

$$\{ i \in I \mid A_i \in \mathcal{V} \}^C = \{ i \in I \mid A_i \notin V \} = \left\{ i \in I \;\middle|\; (A_i)^C \in \mathcal{V} \right\} \in \mathcal{U}.$$

  Ma vale anche che

$$(A_i)^C = \{ j \in J \mid (i,j) \in A \}^C = \left\{ j \in J \;\middle|\; (i,j) \in A^C \right\} = (A^C)_i$$

  da cui segue che $A \notin \mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ implica $\left\{ i \in I \;\middle|\; (A^C)_i \in \mathcal{V} \right\} \in \mathcal{U}$, cioè $A^C \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$.

ii) Dimostro le due implicazioni:

$\Rightarrow$) Se $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale, allora esiste $A \subset I \times J$ finito (non vuoto) contenuto in esso. Allora A_i è non vuoto solo per finiti indici i e dunque $\{ i \in I \mid A_i \in \mathcal{V} \} \in \mathcal{U}$ è finito; perciò $\mathcal{U}$ contiene un insieme finito ed è pertanto principale. Inoltre se $A_i \neq \emptyset$, è necessariamente finito ed esiste almeno un indice $i \in I$ tale per cui $A_i \in \mathcal{V}$ (altrimenti $\emptyset \in \mathcal{U}$); ne segue che anche $\mathcal{V}$ è principale.

$\Leftarrow$) Siano $\mathcal{U}$ generato da $\tilde{i} \in I$ e $\mathcal{V}$ generato da $\tilde{j} \in J$. Allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è l'ultrafiltro principale su $I \times J$ generato dalla coppia $(\tilde{i}, \tilde{j})$. Infatti:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} &\iff \{ i \in I \mid A_i \mathcal{V} \} \in \mathcal{U} \\ &\iff \left\{ i \in I \;\middle|\; \tilde{j} \in A_i \right\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \tilde{i} \in \left\{ i \in I \;\middle|\; (i, \tilde{j}) \in A \right\} \\ &\iff (\tilde{i}, \tilde{j}) \in A. \end{aligned}$$

iii) Siano $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ ultrafiltri rispettivamente sugli insiemi di indici I, J, K. Uso le notazioni: $A_{(i,j)} = \{ k \in K \mid (i,j,k) \in A \}$ e $A_i = \{ (j,k) \in J \times K \mid (i,j,k) \in A \}$.

Applicando ripetutamente la definizione di prodotto tensoriale si ottiene:

$$\begin{aligned}
A \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} &\iff \big\{ \, (i,j) \in I \times J \, \big| \, A_{(i,j)} \in \mathcal{W} \, \big\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \\
&\iff \big\{ \, i \in I \, \big| \, \big\{ \, j \in J \, \big| \, A_{(i,j)} \in \mathcal{W} \, \big\} \in \mathcal{V} \, \big\} \in \mathcal{U} \\
&\iff \{ \, i \in I \mid \{ \, j \in J \mid (i,j,k) \in A \, \} \in \mathcal{V} \, \} \in \mathcal{U} \\
&\iff \{ \, i \in I \mid \{ \, j \in J \mid (j,k) \in A_i \, \} \in \mathcal{V} \, \} \in \mathcal{U} \\
&\iff \{ \, i \in I \mid A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \, \} \in \mathcal{U} \\
&\iff A \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})
\end{aligned}$$

iv) Suppongo che sia $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. Noto che necessariamente dovrà essere $I = J$ (poiché $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è ultrafiltro su $I \times J$ e $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ su $J \times I$).
Osservo che, dato $A \subseteq I$, si ha

$$(A \times I)_i = \{ \, j \in I \mid (i,j) \in A \times I \, \} = \begin{cases} I & \text{se } i \in A \\ \emptyset & \text{se } i \notin A. \end{cases}$$

e dunque

$$A \times I \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \iff A = \{ \, i \in I \mid (A \times I)_i \in \mathcal{V} \, \} \in \mathcal{U}.$$

Quindi:

$$A \in \mathcal{U} \iff A \times I \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{U} \iff A \in \mathcal{V}.$$

Ne segue pertanto che $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.