Esercizi lezione 2/3/15, Andrea Vaccaro

4 marzo 2015

Proposizione 0.1. *Siano U, V e W ultrafiltri su I, J e K rispettivamente. Verificare che:*

i) $U \otimes V$ *è ultrafiltro*

ii) $U \otimes V$ *è principale se e solo se U e V lo sono*

iii) $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$

iv) siano U e V ultrafiltri su I. Se $U \neq V$ allora $U \otimes V \neq V \otimes U$

Dimostrazione. i). Sia $A \in U \otimes V$, e $B \supseteq A$; da ciò segue che $B_i \supseteq A_i$ (le fibre i-esime) per ogni $i \in I$, perciò se $A_i \in V$, anche $B_i \in V$, e dunque $\{i \in I : B_i \in V\} \supseteq \{i \in I : A_i \in V\} \in U$, perciò $B \in U \otimes V$.

Se A, $B \in U \otimes V$, allora $\{i \in I : B_i \in V\} \cap \{i \in I : A_i \in V\} \in U$ (U filtro). Poiché vale che $\{i \in I : B_i \in V\} \cap \{i \in I : A_i \in V\} = \{i \in I : A_i \cap B_i \in V\}$ (che vale poiché V è filtro), vale anche la chiusura per interesezione finita.

Sia infine $A \notin U \otimes V$; ciò equivale a dire $\{i \in I : A_i \notin V\} \in U$, poiché U è ultrafiltro. Ma tale insieme è, grazie al fatto che anche V è ultrafiltro, $\{i \in I : A_i^c \in V\}$, perciò $A^c \in U \otimes V$.

ii). $U \otimes V$ è principale se e solo se contiene A finito. In questo caso allora ci saranno solo finite fibre non vuote, e queste stesse avranno cardinalità finita. Ma allora $\{i \in I : A_i \in V\}$ è finito (se $A_i = \emptyset$ non può stare in V), e poiché è in U, quest'ultimo sarà principale. Inoltre, per almeno una $i \in I$ deve valere $A_i \in V$ ($\emptyset \notin U$), e poiché tale fibra sarebbe finita, anche V è principale.

Siano ora $U = U_k$ e $V = V_j$ principali. Considero l'insieme $A_{k,j} = \{(k, j)\}$; la sua fibra k-esima (cioè $\{j\}$) è in V, perciò $\big\{i \in I : (A_{(k,j)})_i \in V\big\} \in U$, perché $\{k\} \in U$. Perciò $A_{(k,j)} \in U \otimes V$, che è dunque principale.

iii). Vale che $A \in (U \otimes V) \otimes W$ se e solo se $B = \big\{(i, j) \in I \times J : A_{(i,j)} \in W\big\} \in U \otimes V$, dove $A_{(i,j)} = \{k \in K : (i, j, k) \in A\}$. Ciò vale se e solo se $\{i \in I : B_i \in V\} \in U$; abbiamo cioè mostrato che $A \in (U \otimes V) \otimes W$ se e solo se $\big\{i \in I : \big\{j \in J : A_{(i,j)} \in W\big\} \in V\big\} \in U$.

D'altra parte, $A \in U \otimes (V \otimes W)$ se e solo se $\{i \in I : A_i \in V \otimes W\} \in U$, che equivale a dire $\big\{i \in I : \big\{j \in J : A_{(i,j)} \in W\big\} \in V\big\} \in U$, perciò la dimostrazione è conclusa.

iv). Siano U e V ultrafiltri distinti su I, esiste perciò $A \subset I$ tale che $A \in U$ e $A^c \in V$. Considero l'insieme $B = A \times I \subset I \times I$. Si verifica che $B \in U \otimes V$ ma $B \notin V \otimes U$.

Da un lato, $\{i \in I : B_i \in V\}$ è esattamente A (in quanto $B_i = I \in V$ se $i \in A$, vuoto altrimenti), dunque è in U, perciò $B \in U \otimes V$.

D'altra parte, $\{i \in I : B_i \in U\}$ è ancora esattamente A (per le stesse ragioni di prima), perciò non è in V per ipotesi, concludendo la dimostrazione. □

Teorema 0.2. *Dimostrare il teorema di Ramsey infinito per $k = 3$.*

Dimostrazione. Sia $[\mathbb{N}]^3 = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, e identifico $[\mathbb{N}]^3$ con $\Delta = \{(n, m, l) : n < m < l\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considero un ultrafiltro U su $\mathbb{N}$ non principale, e prendo l'ultrafiltro $U \otimes U \otimes U$ su $\mathbb{N}^3$.

Si verifica che $\Delta \in U \otimes U \otimes U$, infatti se si considera $\{n : \Delta_n \in U \otimes U\}$, $\Delta_n \in U \otimes U$ se e solo se $\{m : \Delta_{m,n} \in U\} \in U$. Ma $\Delta_{m,n}$ ha sempre complementare finito perché è dato dall'insieme $\{l : (n, m, l) \in \Delta\} = \{l : l > m\}$, perciò è sempre in U. Ergo $\Delta_n \in U \otimes U$ per ogni n, e quindi segue la tesi.

Definendo a partire dalla colorazione data dai C_i, la colorazione dei $C'_i = \{(a, b, c) : a < b < c \text{ e } \{a, b, c\} \in C_i\}$, si ottiene la partizione $\Delta = C'_1 \sqcup \cdots \sqcup C'_r$, dunque esiste $C'_i \in U \otimes U \otimes U$.

La dimostrazione si conclude col seguente claim.

Claim 0.3. *Se U non principale e $B \in U \otimes U \otimes U$, allora esiste H infinito tale che $[H]^3 \subseteq B$.*

Si ha che $B \in U \otimes U \otimes U$ se e solo se $\hat{B} = \{n : B_n \in U \otimes U\} \in U$, e ancora $B_n \in U \otimes U$ se e solo se $\hat{B}_n = \{m : B_{n,m} \in U\} \in U$.

Sia allora $h_1 \in \hat{B}$, quindi $B_{h_1} \in U \otimes U$, ovvero $\hat{B}_{h_1} \in U$. Poiché U è non principale, possiamo trovare $h_2 \in \hat{B} \cap \hat{B}_{h_1}$ tale che $h_2 > h_1$. Dal momento che $h_2 \in \hat{B}_{h_1}$, allora $B_{h_1,h_2} \in U$, e poiché $h_2 \in \hat{B}$, si ha $\hat{B}_{h_2} \in U$. Analogamente a prima si può dunque scegliere un $h_3 \in \hat{B} \cap B_{h_1,h_2} \cap \hat{B}_{h_1} \cap \hat{B}_{h_2}$ tale che $h_3 > h_2 > h_1$. Cerchiamo di capire perché abbiamo scelto h_3 in questo modo: il fatto che $h_3 \in B_{h_1,h_2}$ garantisce che $(h_1, h_2, h_3) \in B$ che ci servirà per far sì che $[H]^3 \subseteq B$. La richiesta che h_3 sia in $\hat{B}_{h_1}$ e $\hat{B}_{h_2}$ ci garantisce che B_{h_1,h_3} e B_{h_2,h_3} siano in U; ciò ci permetterà di scgliere $h_4 > h_3$ in un insieme di U, che sarà l'intersezione dei vari B_{h_i,h_j} quando $i < j < 4$, dei $\hat{B}_{h_i}$ per $i < 4$ (il motivo per cui abbiamo scelto h_3 anche in $\hat{B}$ è proprio per avere anche $\hat{B}_{h_3} \in U$), e di $\hat{B}$, tutti elementi di U, in modo da poter proseguire la costruzione mantenendo $(h_i, h_j, h_k) \in B$ per $i < j < k$.

Riassumendo, se siamo arrivati a costruire fino all'elemento h_k, per costruzione avremo che $(h_i, h_j, h_l) \in B$ per $i < j < l \leq k$, e che tutti i B_{h_i,h_j} con $i < j \leq k$ sono in U, come anche i $\hat{B}_{h_i}$ con $i \leq k$ e ovviamente $\hat{B}$. Grazie a questa costruzione, e grazie al fatto che U è non principale, si può scegliere $h_{k+1} > h_k$ nell'intersezione di tutti questi insiemi, che da un lato mi garantisce che $(h_i, h_j, h_l) \in B$ per $i < j < l \leq k + 1$, dall'altro vale che i B_{h_i,h_j} con $i < j \leq k + 1$ sono in U (perché $h_{k+1} \in \hat{B}_{h_i}$ per $i \leq k$), come anche i $\hat{B}_{h_i}$ con $i \leq k + 1$ (perché $h_{k+1} \in \hat{B}$), quindi la costruzione può essere reiterata in modo induttivo.

Si ottiene in definitiva un insieme $H = \{h_1 < h_2 < \cdots\}$ che soddisfa la tesi. $\square$