Esercizi

Federico Scavia

March 3, 2015

Esercizio 1. *Definizioni equivalenti di ultrafiltro. Sia F un filtro su un insieme I, allora sono equivalenti*

1. *F e' massimale tra i filtri.*

2. *$\forall A \subseteq X$ sottoinsieme di I, $A^c \notin F \Rightarrow A \in F$.*

3. *Se $A \cup B \in F$ allora $A \in F$ oppure $B \in F$.*

4. *Se $C_0 \cup \cdots \cup C_r \in F \Rightarrow \exists\ k\ C_k \in F$.*

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2): sia per assurdo A tale che $A, A^c \notin F$, allora A non e' l'insieme vuoto perche' $I \in F$. Uno tra A e A^c ha intersezione non vuota con tutti gli elementi di F: altrimenti si avrebbero $F_0, F_1 \in F$ tali che $A \cap F_0 = A^c \cap F_1 = \emptyset$, dunque $F_0 \cap F_1 = \emptyset \in F$, assurdo perche' F e' un filtro. Supponiamo dunque che A intersechi non banalmente ogni elemento di F. Consideriamo $G := \{B \subseteq X |\ \exists\ F_0 \in F, A \cap F_0 \subseteq B\}$. Chiaramente G contiene F e A; se G e' un filtro per massimalita' di F si ha $G = F$ e dunque $A \in F$.

- L'insieme vuoto non sta in G perche' si e' scelto A in modo che $A \cap F_0 = \emptyset$.

- Se $B \subseteq C$ e $B \in G$, allora $C \in F$ (chiaro perche' $A \cap F_0 \subseteq B \subseteq C$).

- Se $B, C \in G$, allora esistono F_0, F_1 tali che $A \cap F_0 \subseteq B$ e $A \cap F_1 \subseteq C$, ma allora $A \cap (F_0 \cap F_1) \subseteq B \cap C$ e $F_0 \cap F_1 \in F$, dunque $B \cap C \in G$.

2) $\Rightarrow$ 3): $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$, dunque o $B \in F$ o $A \cap B^c \in F$. Nel primo caso abbiamo finito, nel secondo deduciamo $A \in F$ (e di nuovo abbiamo finito) oppure $B^c \in F$ e $A^c \in F$ (quest'ultima per l'ipotesi 2), siccome $A \notin F$). In tal caso pero' $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in F$, impossibile perche' gia' $A \cup B \in F$.

3) $\Rightarrow$ 4) Segue immediatamente per induzione su r, osservando che $C_0 \cup \cdots \cup C_r = (C_0 \cup \cdots \cup C_{r-1}) \cup C_r$ e dunque se $C_r \notin F$ necessariamente $C_0 \cup \cdots \cup C_{r-1} \in F$ grazie all'ipotesi 3).

4) $\Rightarrow$ 1): sia $G \supseteq F$ un filtro contenente G, dimostriamo che $F = G$. Sia $A \in G$, allora $A^c \cup A = I \in F$, dunque uno tra A e A^c deve stare in F, ma non puo' essere A^c perche' altrimenti starebbe anche in G.

$\square$

Esercizio 2. *U, V ultrafiltri su I, J. Allora $U \otimes V$ e' un ultrafiltro su $I \times J$, principale se e solo se U, V lo sono. L'operazione $\otimes$ e' associativa.*

Proof. Vediamo che $U \otimes V$ e' un ultrafiltro.

- $I \times J \in U \otimes V$ perche' $\forall i \in I (I \times J)_i = J \in V$ e $I \in U$. $\emptyset \notin U \otimes V$ perche' $\forall i \in I \emptyset_i \notin V$ e $\emptyset \notin U$.

- Se $A \in U \otimes V$ e $A \subseteq B \subseteq I \times J$, allora $\{i \in I : B_i \in V\}$ contiene $\{i \in I : A_i \in V\}$ perche' $\forall i \in I A_i \subseteq B_i$.

- Se $A, B \in U \otimes V$, allora $\forall i \in I (A \cap B)_i = A_i \cap B_i \in V$ e dunque $\{i \in I : (A \cap B)_i \in V\} \supseteq \{i \in I : A_i \in V\} \cap \{i \in I : B_i \in V\} \in U$ (in effetti vale proprio l'uguaglianza, per la proprieta' del soprainsieme).

- Fin qui non si e' usata la proprieta' di ultrafiltro di U e V. Se $A^c \subseteq I \times J$, $A^c \notin U \otimes V$, questo vuol dire che $\{i \in I : (A^c)_i \in V\} \notin U$. Chiaramente $(A^c)_i = {A_i}^c$ e siccome U e' ultrafiltro possiamo scrivere $\{i \in I : (A^c)_i \in V\} = \{i \in I : {A_i}^c \in V\} = \{i \in I : A_i \in V\}^c \in U$, ovvero $A^c \in U \otimes V$.

Se $U = U_i, V = V_j$, allora $U \otimes V = (I \times J)_{(i,j)}$. Infatti

$$A \in U \otimes V \iff \{i' \in I : A_{i'} \in V_j\} \in U_i \iff i \in \{i' \in I : j \in A_{i'}\} \iff (i,j) \in A$$

Per l'altro verso, osserviamo preliminarmente che se $A \in U \iff A \times J \in U \times V$. Infatti $\{i \in I : (A \times J)_i \in V\} = \{i \in A : J \in V\} = A \in U \iff A \in U$. Se $U \otimes V$ e' principale rispetto a (i,j), allora U lo e' rispetto a i. Infatti

$$A \in U \iff A \times J \in U \times V \iff (i,j) \in A \times J \iff i \in A$$

$\square$

Siano ora U, V, W filtri su insiemi I, J, K.

$$\begin{aligned} A \in U \otimes (V \otimes W) &\iff \{i \in I : A_i \in V \otimes W\} \in U \\ &\iff \{i \in I : \{(i,j) \in I \times J : A_{(i,j)} \in W\}_i \in V\} \in U \\ &\iff \{(i,j) \in I \times J : A_{(i,j)} \in W\} \in U \times V \\ &\iff A \in (U \otimes V) \otimes W \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio è vero pensando $(I \times J) \times K = I \times (J \times K) = I \times J \times K$.

Esercizio 3. *X spazio topologico. Allora X è compatto $\iff$ per ogni I insieme di indici, U ultrafiltro su I e $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ si ha che $(x_i)_{i \in I}$ ammette U-limite.*

Proof. Sia X è compatto e sia U un ultrafiltro su I. Se per assurdo $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ non ammettesse U-limite allora $\forall y \in X \exists V_y$ intorno aperto di y tale che $\{i \in I : x_i \in V_y\} \notin U$. D'altra parte, scelto per compattezza un sottoricoprimento finito di $X = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k}$, si ha $I = \{i \in I : x_i \in V_{y_1}\} \cup \{i \in I : x_i \in V_{y_k}\} \in U$, dunque uno dei k insiemi dovrebbe essere in U per la proprietà di ultrafiltro, assurdo.

Passiamo all'altro verso. Sia $(C_i)_{i \in I}$ una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita. Allora la famiglia dei soprainsiemi delle intersezioni finite di questi forma un filtro F sull'insieme X:

- $\emptyset \notin F$ per ipotesi, $X \in F$ perché contiene un chiuso qualsiasi.

- Se $A \in F$ e $B \supseteq A$ allora $B \in F$ (se A contiene una certa intersezione di C_i, anche B la contiene)

- Se $A \supseteq \cap C_{i_l}$, $B \supseteq \cap C_{j_p}$ e allora $A \cap B \supseteq (\cap C_{i_l}) \cap \cap C_{j_p} \in F$.

Estendiamo allora F ad un ultrafiltro U. Sia $y \in X$ di U-limite per $(x_i)_{i \in I}$, ovvero $\forall V$ intorno di y vale $V = \{x \in X : x \in V\} \in U$ (prendendo come successione $(x)_{x \in X}$). Dimostriamo allora che $y \in C_i \forall i \in I$. Se per assurdo $\exists i \in I$ $y \notin C_i$ allora c'è un intorno V di y disgiunto da C_i, ma tale intorno contiene una certa $\cap_{l=1}^k C_{i_l}$ e si avrebbe dunque $C_i \cap (\cap_{l=1}^k C_{i_l}) = \emptyset$, contraddizione. □

Esercizio 4. *Teorema di Tychonoff*

Proof. : sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici.

Indichiamo con $\pi_i : X \to X_i$ la proiezione naturale, che è suriettiva, continua e aperta.

Se $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto, allora ogni X_i lo è perché π è continua.

Siano ora tutti gli X_i compatti. Sia U un ultrafiltro su un insieme J e sia $(x_j)_{j \in J}$ una successione con $x_j \in \prod_{i \in I} X_i$. Allora ogni componente della successione $\pi_i(x_j)$ ha un punto di U-limite, sia $a_i \in X_i$. Per l'assioma di scelta, esiste $a \in X$ con $\pi_i(a) = a_i \forall i \in I$. Vogliamo dimostrare che $(x_j)_{j \in J}$ ha a come punto limite, ovvero che $\forall V \subseteq X$ intorno di a, $\{j \in J : x_j \in V\} \in U$. Basta provarlo per V appartenente alla base canonica della topologia prodotto, ovvero $\pi_i(V) = X_i$ tranne che per un numero finito di indici per cui $\pi_{i_1}(V) = V_{i_1}, \ldots, \pi_{i_k}(V) = V_{i_k}$ con $V_{i_l} \subseteq X_{i_l}$ aperto. Poniamo $C_l = \{j \in J : x_{i_l} \in V_{i_l} \in U$ perché V_{i_l} è per costruzione intorno di a_{i_l}. Allora $\{j \in J : x_j \in V\} = C_1 \cap \cdots \cap C_k$ deve essere in U, vero perché ciascuno dei C_l ci sta.

□

Esercizio 5. *X spazio topologico è di Hausdorff $\iff$ per ogni famiglia $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ e per ogni ultrafiltro su I esiste al più un U-limite per $(x_i)_{i \in I}$.*

Proof. Sia X di Hausdorff e siano x, y punti di U-limite per $(x_i)_{i \in I}$. Siano $A, B \subseteq$ intorni disgiunti di x e y rispettivamente. Se per assurdo $x \neq y$ allora $\{i \in I : x_i \in A\} \cap \{i \in I : x_i \in B\} = \emptyset$, impossibile perché i due insiemi dovrebbero stare nell'ultrafiltro.

Supponiamo l'unicità del limite. Siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$. Se per assurdo x, y non hanno intorni disgiunti, allora la famiglia $S = \{A \cap B : A \text{ intorno di} x, B \text{ intorno di} y\}$ (dove I ha la cardinalità dei sistemi di intorni) ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque si estende a filtro su I e quindi ad ultrafiltro su I, sia $U \supseteq S$. Sappiamo che ogni elemento di S è non vuoto e allora prendendo (per l'assioma di scelta) un elemento per ogni intersezione, la successione che ne risulta ha sia x che y come punti limite.

□