Esercizi lezione 24/2/15, Andrea Vaccaro

3 marzo 2015

Proposizione 0.1. *Sia F un filtro. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $A^c \notin F \Rightarrow A \in F$

ii) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in F \Rightarrow \exists i$ *tale che* $A_i \in F$

iii) F *è massimale rispetto all'inclusione*

Dimostrazione. $i \Rightarrow ii$. Se nessun $A_i \in F$, allora per ogni i vale $A_i^c \in F$, dunque $\bigcap_i A_i^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c \in F$, il che risulta assurdo in quanto abbiamo assunto $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in F$.

$ii \Rightarrow iii$. Sia $G \supseteq F$. Se per assurdo $A \in G \setminus F$, poiché $A \cup A^c \in F$, allora $A^c \in F \subseteq G$, da cui segue un assurdo, poiché $A \cap A^c = \emptyset \in G$.

$iii \Rightarrow i$. Sia $A \notin F$. Poiché F massimale, significa che se chiudo per intersezioni finite e verso l'alto $F \cup \{A\}$, devo ottenere per forza un insieme che contiene $\emptyset$, ovvero esiste $B \in F$ tale che $B \cap A = \emptyset$, ovvero $B \subseteq A^c$, che quindi è in F. □

Proposizione 0.2. *Sia U un ultrafiltro su $\mathbb{N}$. $F = Fun(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ con le operazioni definite puntalmente è un anello. Definisco $M = \{\phi \in F : Z(\phi) \in U\}$ con $Z(\phi) = \{n \in \mathbb{N} : \phi(n) = 0\}$. Verificare che M è un ideale massimale e che in questo modo si ottiene una bigezione fra ultrafiltri su $\mathbb{N}$ e ideali massimali in F.*

Dimostrazione. Fissiamo U ultrafiltro. Verifichiamo che M è un ideale. Se $\phi, \psi \in M$ allora $Z(\phi), Z(\psi) \in U$; si vede facilmente che $Z(\phi + \psi) \supseteq Z(\phi) \cap Z(\psi) \in U$, in quanto se $\phi(n) = \psi(n) = 0$ allora $\phi(n) + \psi(n) = 0$, quindi $\phi + \psi \in M$.

Se $\phi \in M$ e $\alpha \in F$, allora $Z(\alpha\psi) \supseteq Z(\phi) \in U$ (perché se $\phi(n) = 0$ allora $\phi(n)\alpha(n) = 0$), ergo $\alpha\phi \in M$, perciò M è ideale.

Sia ora $N \supseteq M$, e vi sia per assurdo $\phi \in N \setminus M$, ovvero $Z(\phi) \notin U$; ciò implica $Z(\phi)^c \in U$. Quest'ultimo fatto mi garantisce la presenza in M di ψ che valga zero dove ϕ è non nulla e che valga (ad esempio) 1 altrove. Si verfica allora che $\phi + \psi$ non è mai nulla, quindi invertibile, dunque $N = F$, e M massimale.

È chiaro che se U e V sono ultrafiltri distinti, gli ideali massimali generati sono distinti (si prende A in U e non in V e si considera ϕ che valga zero su A e 1 altrove).

Viceversa, se parto da un ideale massimale M e considero $U = \{Z(\phi) : \phi \in M\}$, si verifica che U è un ultrafiltro. Sia infatti $A \in U$ e $A \subseteq B$. $A = Z(\phi)$ per una certa $\phi \in M$; se si considera $\alpha \in F$ che valga zero su B e 1 altrove, si vede facilmente che $Z(\alpha\phi) = B$ che dunque appartiene a U.

Se $A, B \in U$, per opportune $\phi, \psi \in M$, $A = Z(\phi)$ e $B = Z(\psi)$. Se prendo $f \in F$ che valga zero su A e $\frac{1}{\phi(n)}$ altrove, allora $Z(f\phi) = A$ e $f\phi = \phi' \in M$ ha valori 0 e 1. Similmente posso costruire ψ' in M a valori 0 e 1 i cui zeri coincidano con quelli di ψ. Si ottiene infine che $Z(\phi' + \psi') = A \cap B$, che quindi è in U.

In conclusione, sia $A \notin U$. Questo significa che per nessuna ϕ in M, $Z(\phi) \subseteq A$ ($\subseteq$ al posto di $=$ perché U chiuso verso l'alto). Poiché M è massimale, si verfica che la funzione ψ che vale 1 su A e zero fuori è in M stesso. Sia infatti $\phi \in M$, allora esiste $k \notin A$ dove tale funzione fa zero (ϕ ammette almeno uno zero perché non è invertibile). Questo comporta che ogni combinazione $\alpha\phi + \beta\psi$ con $\alpha, \beta \in F$ è non invertibile (si annulla in k), perciò se $\psi \notin M$, l'ideale generato da M e ψ sarebbe ancora proprio, contro la massimalità di M.

È chiaro che se da un ultrafiltro ricavato in questo modo ricostruissimo un ideale massimale come abbiamo descritto all'inizio, riotterremmo M, dunque la dimostrazione è conclusa. Infatti $N = \{\phi \in F : \exists \psi \in M \text{ tale che } Z(\phi) = Z(\psi)\} = M$; da un lato ovviamente $M \subseteq N$, dall'altro se $\phi \in N$, considero $\psi \in M$ che abbia gli stessi zeri di ϕ, e considero $f\psi \in M$, dove f è nulla dove si annulla ψ, e per gli altri n si ha $f(n) = \frac{\phi(n)}{\psi(n)}$. Ovviamente $\phi = f\psi$. □

Teorema 0.3. *Dando per buono che uno spazio topologico X è compatto se e solo se per ogni ultrafiltro U su X ogni successione ammette un U-limite, dimostrare il teorema di Tychonoff.*

Dimostrazione. Sia $X = \prod_{i \in I} X_i$ con X_i compatto per ogni $i \in I$, e fissiamo U un ultrafiltro su X. Consideriamo una successione $\{x_j\}_{j \in J}$ in X. Si ha che $x_j = (x_j^i)_{i \in I}$, e che per ogni i, $\left\{x_j^i\right\}_{j \in J}$ è una successione in X_i.

Ora, tramite U, andremo a indurre un ultrafiltro U_i su X_i per ogni $i \in I$, più precisamente poniamo $U_i = \{\pi_i(A) : A \in U\}$ dove π_i è la proiezione di X su X_i.

Claim 0.4. *U_i è un ultrafiltro.*

Sia $A \in U_i$ e $B \supseteq A$. Si ha che $A = \pi_i(A')$ per un opportuno $A' \in U$. Poiché vale la seguente catena di inclusioni $\pi_i^{-1}(B) \supseteq \pi_i^{-1}(A) \supseteq A'$, si ricava $\pi_i^{-1}(B) \in U$, e dunque $\pi_i(\pi_i^{-1}(B)) = B \in U_i$.

Siano ora $A, B \in U_i$ e $A = \pi_i(A')$, $B = \pi_i(B')$ con $A', B' \in U$. Poiché vale $\pi_i(A' \cap B') \subseteq \pi_i(A') \cap \pi_i(B') = A \cap B$, e poiché il primo è in U_i, per il passo precedente otteniamo anche la chiusura per intersezione finita.

Infine, consideriamo $A \notin U_i$. Di conseguenza $\pi_i^{-1}(A) \notin U$, perciò $\pi_i^{-1}(A)^c \in U$; dal momento che vale $\pi_i^{-1}(A)^c \subseteq \pi_i^{-1}(A^c)$, e ovviamente $\pi_i(\pi_i^{-1}(A^c)) = A^c$, si ottiene finalmente che U_i è ultrafiltro.

Torniamo a noi. Avevamo detto che $\{x_j\}_{j \in J}$ induceva su ogni X_i delle successioni, ognuna delle quali ammette, in virtù di quanto abbiam dimostrato nel claim, un U_i-limite, che chiameremo x^i. Definiamo $x = (x^i)_{i \in I}$; lui è il nostro candidato U-limite.

Sia V un aperto di base contenente x. Vale che $V = \prod_{i \in I} V_i$, dove $V_i = X_i$ per ogni $i \in I \setminus C$, con C finito. Definiamo $H_i = \left\{x_j^i \in X_i : x_j^i \in V_i\right\}$. Poiché ogni X_i è compatto e $x_i \in V_i$, ogni H_i è in U_i, e se $i \notin C$, allora $H_i = X_i$. Ci serve un ultimo claim per concludere.

Claim 0.5. *Se $A \in U_i$, allora $\pi_i^{-1}(A) \in U$.*

Se infatti $\pi_i^{-1}(A)^c \in U$, allora anche $\pi_i^{-1}(A^c)$ che lo contiene sarebbe in U, causando un assurdo, perché si avrebbe $A^c \in U_i$.

Se allora consideriamo i $\pi_i^{-1}(H_i)$ per ogni $i \in C$ otteniamo degli elementi di U, la cui intersezione che chiameremo H', sarebbe ancora in U. Ma allora $H = \{x_j \in X : x_j \in V\} \supseteq H' \in U$, concludendo la dimostrazione per gli aperti di base, vista la genericità di U e V intorno di x.

Se W non fosse aperto di base intorno di x, la tesi seguirebbe scegliendo V aperto di base in W contenente x e applicando il punto precedente (poiché $\{x_j \in X : x_j \in W\} \supseteq \{x_j \in X : x_j \in V\}$) □