Esercizi del corso di “Ultrafiltri e metodi non standard”

Giada Franz

2 marzo 2015

1 Filtri e ultrafiltri

Teorema 1.1. *Sia $\mathscr{F}$ un filtro su I, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *Se $A^c \notin \mathscr{F}$, allora $A \in \mathscr{F}$.*
2. *Se $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$, allora esiste i tale che $A_i \in \mathscr{F}$.*
3. *$\mathscr{F}$ è massimale rispetto all'inclusione.*

Dimostrazione. **1** $\implies$ **2** Supponiamo per assurdo di avere $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$ e $A_i \notin \mathscr{F}$ per ogni i. Allora, per quanto assunto, vale che $A_i^c \in \mathscr{F}$ per ogni i. Perciò abbiamo che $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c \in \mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ è chiuso per intersezioni finite), ma questo è assurdo perché in un filtro non ci possono stare sia un insieme e che il suo complementare.

2 $\implies$ **3** Sia $\tilde{\mathscr{F}}$ un filtro contenente $\mathscr{F}$ e sia $A \in \tilde{\mathscr{F}}$. Dato che $A \cup A^c = I \in \mathscr{F}$, uno fra A e A^c appartiene ad $\mathscr{F}$. Ma A^c non appartiene ad $\tilde{\mathscr{F}}$, perché un filtro non può contenere un insieme e il suo complementare, quindi A^c non appartiene ad $\mathscr{F} \subseteq \tilde{\mathscr{F}}$; di conseguenza A appartiene ad $\mathscr{F}$. Abbiamo quindi dimostrato che $\mathscr{F} = \tilde{\mathscr{F}}$ e perciò $\mathscr{F}$ è massimale.

3 $\implies$ **1** Supponiamo per assurdo che esista A tale che $A\,,\, A^c \notin \mathscr{F}$. Vogliamo mostrare innanzitutto che uno fra A e A^c ha intersezione non vuota con ogni elemento di $\mathscr{F}$. Supponiamo che ciò non sia vero ed esistano quindi $B\,,\, C \in \mathscr{F}$ tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A^c \cap C = \emptyset$. Ciò però è assurdo in quanto otterrei che $B \cap C = \emptyset \in \mathscr{F}$.

Senza perdità di generalità abbiamo quindi che $A \cap B \neq \emptyset$ per ogni $B \in \mathscr{F}$. Considerò perciò l'insieme $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cup \{B \in \mathscr{P}(I) \mid A \subseteq B\} \cup \{A \cap B \mid B \in \mathscr{F}\}$. Verifichiamo che $\tilde{\mathscr{F}}$ sia un filtro. Sia $C \in \mathscr{P}(I)$ che contiene un elemento di $\tilde{\mathscr{F}}$, vogliamo dire che $C \in \tilde{\mathscr{F}}$. L'unico caso non ovvio è quando C contiene un elemento della forma $A \cap B$ con $B \in \mathscr{F}$. In tal caso però $C \cup A\,,\, C \cup B \in \tilde{\mathscr{F}}$ (perché $C \cup A \supseteq A \in \{B \in \mathscr{P}(I) \mid A \subseteq B\}$ e $C \cup B \supseteq B \in \mathscr{F}$, che sono banalmente chiusi per sovrainsiemi) e perciò $C = C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \in \tilde{\mathscr{F}}$. Ci manca da verificare che $\tilde{\mathscr{F}}$ sia chiuso per intersezione. Ancora una volta l'unico caso non banale è verificare che l'intersezione di due elementi $A \cap B\,,\, A \cap C$ con $B\,,\, C \in \mathscr{F}$ stia ancora in $\tilde{\mathscr{F}}$. Questo però è vero perché $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap (B \cap C)$, che sta in $\tilde{\mathscr{F}}$ perché $B \cap C \in \mathscr{F}$.

Abbiamo quindi mostrato che $\tilde{\mathscr{F}}$ è un filtro contenente strettamente $\mathscr{F}$, ma ciò è assurdo per l'ipotesi di massimalità di $\mathscr{F}$. □

Definizione 1.2. Se un filtro rispetta una delle tre proprietà equivalenti del Teorema 1.1 viene detto ultrafiltro.

Proposizione 1.3. *C'è una corrispondenza biunivoca fra i filtri su I e gli ideali di* $\mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$ *con* $\mathbb{K}$ *campo. Tale corrispondenza definisce anche una bigezione fra gli ultrafiltri e gli ideali massimali.*

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto l'applicazione f che associa ad un filtro $\mathscr{F}$ il sottoinsieme di $\mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$ dato da $M = \{\varphi \in \mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K}) \mid \ker(\varphi) \in \mathscr{F}\}$. Vogliamo verificare che M è un ideale di $\mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$.

Siano $\varphi\,,\,\psi \in M$, allora $\ker(\varphi + \psi) \supseteq \ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$; perciò, dato che $\ker(\varphi) \cap \ker(\psi) \in \mathscr{F}$ ed $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi, $\ker(\varphi + \psi) \in \mathscr{F}$ e quindi $\varphi + \psi \in M$.

Siano ora $\varphi \in M$ e $\psi \in \mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$, allora vale che $\ker(\psi\cdot\varphi) \supseteq \ker(\varphi)$ e quindi analogamente a prima, visto che $\ker(\varphi) \in \mathscr{F}$, abbiamo che $\ker(\psi\cdot\varphi) \in \mathscr{F}$ e perciò $\psi\cdot\varphi \in M$.

Abbiamo quindi dimostrato che M è un ideale di $\mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$, in quando è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per un elemento dell'anello.

Consideriamo ora invece l'applicazione g che associa ad un ideale M di $\mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$ l'insieme $\mathscr{F} = \{\ker(\varphi) \mid \varphi \in M\} \subseteq \mathscr{P}(I)$. Vogliamo dimostrare che $\mathscr{F}$ è un filtro su I.

Innanzitutto mostriamo che $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi. Sia $\varphi \in M$ e sia $A \in \mathscr{P}(I)$ tale che $A \supseteq \ker(\varphi)$, consideriamo $\psi \in \mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$ l'applicazione data da $\psi(x) = 0$ se $x \in A$ e $\psi(x) = 1$ altrimenti. Abbiamo allora che $\psi\cdot\varphi \in M$, poichè M è un ideale, e inoltre $\ker(\psi\cdot\varphi) = A$, quindi $A \in \mathscr{F}$.

Dimostriamo ora invece che $\mathscr{F}$ è chiuso per intersezione. Visto che M è chiuso per moltiplicazione per un elemento dell'anello, dati $\varphi \in M$ e $k \in \mathbb{K}^*$ esiste $\tilde{\varphi} \in M$ tale che $\ker(\tilde{\varphi}) = \ker(\varphi)$ e $\tilde{\varphi}(x) = k$ se $x \notin \ker(\varphi)$. Basta infatti moltiplicare φ per la funzione ψ definita come

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in \ker(\varphi) \\ k\cdot(\varphi(x))^{-1} \text{ se } x \notin \ker(\varphi) \end{cases} \quad .$$

Siano quindi $A\,,\,B \in \mathscr{F}$ e $\varphi\,,\,\psi \in M$ tali che $\ker(\varphi) = A$ e $\ker(\psi) = B$. Distinguiamo ora due casi:

- Se $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, esistono $k_1\,,\,k_2 \in \mathbb{K}$ tali che $k_1 + k_2 \neq 0$. Inoltre per quanto detto precedentemente esistono $\tilde{\varphi}\,,\,\tilde{\psi} \in M$, con gli stessi ker di φ e ψ e uguali a k_1 e k_2 altrove rispettivamente. Vale perciò facilmente che $\ker(\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}) = \ker(\tilde{\varphi}) \cap \ker(\tilde{\psi}) = A \cap B$. Da cui perciò $\mathscr{F}$ è chiuso per intersezione, poichè $\ker(\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}) \in \mathscr{F}$.
- Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, consideriamo la funzione $\varphi + \psi + \varphi\cdot\psi$. Tale funzione si annulla in $\ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$ e vale 1 altrove (è un semplice controllo sfruttando che se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ le funzioni valgono 0 o 1).

Abbiamo perciò dimostrato che f e g inducono delle funzioni:

$$f : \{\text{filtri su } I\} \to \{\text{ideali di } \mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})\}$$
$$g : \{\text{ideali di } \mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})\} \to \{\text{filtri su } I\}$$

Vale inoltre molto facilmente che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono l'identità sui rispettivi insiemi, quindi otteniamo che $f\,,\,g$ sono corrispondenze biunivoche.

Inoltre, per quanto dimostrato nel Teorema 1.1, gli ultrafiltri corrispondono ai filtri massimali rispetto all'inclusione e quindi tramite la funzione f vengono mappati negli ideali massimali di $\mathrm{Fun}(I\,,\,\mathbb{K})$. Tale corrispondenza è biunivoca in quando un ideale massimale, tramite g, viene mandato a sua volta in un elemento massimale dell'insieme dei filtri, cioè in un ultrafiltro. $\square$