1 Compattezza per aperti e per ultrafiltri

Definizione 1.1. Fissato $(X\,,\,\tau)$ uno spazio topologico, diremo che è compatto per ultrafiltri se, per ogni successione $(x_i)_{i\in I}$ ed ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ sul medesimo insieme di indici, la successione ammette $\mathcal{U}$-limite.

Proposizione 1.2 (Equivalenza delle compattezze)**.** *Per uno spazio topologico arbitrario $(X\,,\,\tau)$ sono equivalenti la compattezza per aperti e la compattezza per ultrafiltri.*

Dimostrazione. Mostriamo che entrambi i tipi di compattezza implicano l'altra con ragionamenti per assurdo.

Assumiamo per assurdo che $(X\,,\,\tau)$ sia compatto per aperti ma *non* per ultrafiltri. Allora esiste una successione $(x_i)_{i\in I}$ ed un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che la successione non ammette $\mathcal{U}$ limite. Ciò vuol dire che ogni punto $x \in X$ non è punto di $\mathcal{U}$-convergenza e perciò ammette un intorno aperto $A_x \in \tau$ tale che

$$I_x = \{i \in I : x_i \in A_x\} \notin \mathcal{U}\,. \tag{1.1}$$

A questo punto è evidente che $(A_x)_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto dello spazio e perciò, per ipotesi, ammette un sottoricoprimento finito $A_{y_1}\,,\,A_{y_2}\,,\,\ldots\,,\,A_{y_n}$. Ma allora è evidente che

$$I_{y_1} \cup I_{y_2} \cup \cdots \cup I_{y_n} = \{i \in I : x_i \in A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n} = X\} = I \in \mathcal{U}$$

e quindi, per una delle caratterizzazioni degli ultrafiltri, almeno uno degli insiemi di indici $I_{y_1}\,,\,\ldots\,,\,I_{y_n}$ appartiene ad $\mathcal{U}$ e ciò mostra l'assurdo vista l'Equazione (1.1).

Per la seconda implicazione assumiamo per assurdo che $(X\,,\,\tau)$ sia compatto per ultrafiltri ma non per aperti. Allora esiste $(A_i)_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X che non ammette sottoricoprimenti finiti. Per trovare l'assurdo ora costruiremo adeguatamente una successione ed un ultrafiltro. È interessante notare che l'ultrafiltro che andremo a costruire dipende solo dall'insieme di indici I e non dal particolare ricoprimento o dallo spazio in questione.

Indicando con $\mathrm{FS}(I)$ l'insieme delle parti finite di I, per ogni $P \in \mathrm{FS}(I)$ definiamo

$$J_P = \{Q \in \mathrm{FS}(I) : P \subseteq Q\}\,. \tag{1.2}$$

È evidente dalla definizione che J_P non è mai uguale all'insieme vuoto e che inoltre $J_P \cap J_{P'} = J_{P\cup P'}$. Allora ha senso chiamare $\mathcal{F}$ il filtro generato dai J_P al variare di P nelle parti finite[1]. Sia ora $\mathcal{U}$ un qualunque ultrafiltro che estende il filtro $\mathcal{F}$.

Costruito l'ultrafiltro che ci servirà ci occupiamo ora di trovare la successione adatta. Non esistendo un sottoricoprimento finito del ricoprimento $(A_i)_{i\in I}$, per ogni $P \in \mathrm{FS}(I)$ l'insieme $X \setminus \bigcup_{i\in P} A_i$ non è vuoto. Perciò, per l'assioma della scelta, esiste una successione $(x_P)_{P\in\mathrm{FS}(I)}$ indicizzata dalle parti finite tale che

$$\forall P \in \mathrm{FS}(I) : x_P \notin \bigcup_{i\in P} A_i\,.$$

Per trovare l'assurdo imponiamo che la successione appena definita converga, sull'ultrafiltro $\mathcal{U}$ costruito in precedenza, al punto x. Di certo esiste $i \in I$ tale che $x \in A_i$ e quindi, per definizione di convergenza, risulta

$$T = \{P \in \mathrm{FS}(I) : x_P \in A_i\} \in \mathcal{U}\,.$$

[1] Quindi $\mathcal{F}$ contiene tutti i J_P e i loro sovrainsiemi.

Ma l'insieme $J_{\{i\}}$, come definito nell'Equazione (1.2), appartiene ad $\mathcal{U}$ per costruzione e di conseguenza $J_{\{i\}} \cap T \neq \emptyset$. Però se P appartiene a quest'ultima intersezione, si ha $i \in P$ e quindi $x_P \notin A_i$, ma questo è assurdo visto che $P \in T$. □

Teorema 1.3 (Tychonoff)**.** *Data una successione* $(X_s)_{s\in S}$ *arbitraria di spazi topologici compatti, l'insieme* $X = \prod_{s\in S} X_i$ *munito della topologia prodotto*[2] *è anch'esso compatto.*

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 1.2 (Equivalenza delle compattezze), è sufficiente verificare che se tutti gli X_i sono compatti per ultrafiltri allora anche il prodotto lo è. Scegliamo quindi una successione $(x_i)_{i\in I}$ a valori nel prodotto X ed un generico ultrafiltro $\mathcal{U}$ sull'insieme di indici I. Indichiamo con x_{is} la proiezione su X_s dell'elemento x_i. Per ipotesi, per ogni $s \in S$, esiste z_s tale che la la successione $(x_{is})_{i\in I}$ converge, sull'ultrafiltro $\mathcal{U}$, a z_s.

Verifichiamo ora, concludendo la dimostrazione, che la successione $(x_i)_{i\in I}$ converge, sull'ultrafiltro $\mathcal{U}$, all'elemento $z = (z_s)_{s\in S}$. Essendo $\mathcal{U}$ chiuso per sovrainsiemi, è sufficiente verificare la convergenza solo sugli elementi della base della topologia di X che contengono z. Sia quindi $A = \prod_{s\in S} A_s$ un elemento della base che contiene z e tale che $A_s \neq X_s$ solo per $s \in \{s_1\,,\ \ldots\ ,\, s_n\}$. A questo punto è evidente l'identità insiemistica

$$\{i \in I : x_i \in A\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{i \in I : x_{is_k} \in A_k\}\,,$$

da cui segue, visto che ognuno degli insiemi che stiamo intersecando appartiene ad $\mathcal{U}$ per l'ipotesi di compattezza degli X_s, che $\{i \in I : x_i \in A\} \in \mathcal{U}$ e questa è proprio la proprietà di convergenza cercata. □

[2] Con topologia prodotto indichiamo la topologia meno fine che rende le proiezioni continue. Tale topologia ammette come base l'insieme formato dai prodotti di aperti tali che tutti gli aperti, tranne un numero finito, consistono dell'intero spazio.