ULTRAFILTRI e METODI NONSTANDARD

in teoria combinatoria dei numeri e di Ramsey

Anno accademico 2012/2013 – I semestre
Corso della laurea specialistica
Docente: Mauro Di Nasso

Scopo del corso è quello di presentare alcuni fondamentali risultati della teoria combinatoria dei numeri e di Ramsey, con particolare attenzione all'uso di due strumenti originati dalla logica matematica, e cioè gli ultrafiltri e l'analisi nonstandard.

Programma previsto

Strumenti:
Filtri e ultrafiltri. Lo spazio topologico degli ultrafiltri βN. Alcune classi speciali di ultrafiltri. βN come semi-gruppo topologico compatto. Ultrafiltri idempotenti. Ultrapotenze. Modelli e principi dell'analisi nonstandard. I numeri iperinteri e i numeri iperreali. Nozioni in teoria combinatoria dei numeri: insiemi di interi spessi, sindetici, sindetici a tratti. Regolarità per partizioni. Densità asintotica, densità di Banach. Caratterizzazioni nonstandard.

Gli strumenti esposti sopra verranno utilizzati per dimostrare i seguenti teoremi ed alcuni altri risultati correlati, tempo permettendo (sono possibili variazioni del programma, a seconda degli interessi degli studenti):

- *Teorema di Ramsey* infinito e finito.
- *Teorema di Schur*: "ogni colorazione finita di N ammette infinite triple (x, y, x+y) monocromatiche".
- *Teorema di Hindman*: "ogni colorazione finita di N ammette un insieme infinito con la proprietà che le somme finite di suoi elementi distinti sono monocromatiche".

- *Teorema di van der Waerden*: "per ogni colorazione finita di N esiste un colore che contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe".
- *Teorema di Rado*: "Ogni equazione diofantea lineare che ha una somma di coefficienti uguale a zero ammette soluzioni monocromatiche per ogni colorazione finita assegnata di N (regolarità per partizioni)". Teorema di Rado per sistemi di equazioni.
- *Teorema di Steinhaus*: "se gli insiemi di reali A e B hanno misura di Lebesgue positiva, allora A+B contiene un intervallo".
- Se A ha densità di Banach positiva, allora l'insieme di differenze A-A è sindetico. Proprietà di intersezione degli insiemi di differenze.
- *Teorema di Jin*: "se A,B hanno densità di Banach positiva, allora A+B è sindetico a tratti".
- *Teorema di approssimazione diofantea*: "Se P(x) è un polinomio con almeno un coefficiente (che non sia il termine noto) irrazionale, allora per ogni e>0 esistono n,m con |P(n)-m|<e".
- *Teorema di Roth*: in ogni insieme di densità di Banach positiva esistono progressioni aritmetiche lunghe tre.
- *Teorema di Sarkozy*: se A ha densità di Banach positiva, allora l'insieme di differenze A-A contiene elementi della forma n^2 (e più in generale della forma P(n) dove P è un qualunque polinomio a coefficienti interi privo di termine noto).
- *Lemma di regolarità* di Szemeredi. Cenni al *Teorema di Szemeredi*: "Ogni insieme di naturali con densità superiore di Banach positiva contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe".

Modalità di esame: Presentazione della risoluzione di esercizi (assegnati con una lezione o due di anticipo); seminario su un teorema collegato a quelli presentati nel corso; colloquio orale relativo alla dimostrazione di due teoremi presentati nel corso.