Esempio: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 11 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Voglio dimostrare che $f_{AB} = f_A \circ f_B$
Questo significa che $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$f_{AB}(\vec{x}) = f_A(f_B(\vec{x}))$$

cioè

$$AB(\vec{x}) = A(B\vec{x})$$

Anziché considerare un generico vettore $\vec{x}$, considero:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Svolgo $A \cdot (B\vec{e_1})$

$$B \cdot \vec{e_1} = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \text{I colonna} + 0 \cdot \text{II colonna} + 0 \cdot \text{III colonna} =$$

$$= \text{I colonna} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{b_1}$$

$$A \cdot (B \cdot \vec{e_1}) = A \cdot \vec{b_1} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Adesso calcolo $(A \cdot B)\vec{e_1}$ in base alla definizione di $A \cdot B$ =

$$(A \cdot B)\vec{e_1} = [A\vec{b_1} \mid A\vec{b_2} \mid A\vec{b_3}] \cdot \vec{e_1} =$$

$$= [A\vec{b_1} \mid A\vec{b_2} \mid A\vec{b_3}] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \text{I colonna} + 0 \cdot \text{II colonna} + 0 \cdot \text{III colonna} =$$

$$= A\vec{b_1}$$

Conclusione $A \cdot (B \cdot \vec{e_1}) = A\vec{b_1} = (A \cdot B)\vec{e_1}$

Infatti $(A \cdot B)\vec{e_1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot (B \cdot \vec{e_1}) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\2\end{pmatrix}$$

Considero $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$A\cdot(B\cdot\vec{e_2}) = A\cdot\vec{b_2} \qquad \left(\text{visto che } B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot \text{I colonna} + 1\,\text{II colonna} + 0\cdot\text{III col}\right)$$

$$(A\cdot B)\vec{e_2} = \left[A\vec{b_1} \mid A\vec{b_2} \mid A\vec{b_3}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = A\cdot\vec{b_2}$$

Analogamente si ha che considerando $\vec{e_3}$:

$$A(B\cdot\vec{e_3}) = (A\cdot B)\vec{e_3} = A\cdot\vec{b_3}$$

Fino a questo momento è stato dimostrato che $A(B\cdot\vec{x}) = (A\cdot B)\cdot\vec{x}$ nei casi particolari in cui $\vec{x} = \vec{e_1}$, $\vec{x} = \vec{e_2}$, $\vec{x} = \vec{e_3}$.
Adesso è necessario capire se ciò è vero anche per $\vec{x}$ vettore qualunque.
Lo si dimostra sapendo che:

■ Per ogni matrice C la funzione associata $f_C: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare, cioè soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}: f_C(\lambda\cdot\vec{v}) = \lambda f_C(\vec{v})$, cioè $C\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(C\cdot\vec{v})$

(2) $\forall \vec{v}, \vec{w}: f_C(\vec{v}+\vec{w}) = f_C(\vec{v}) + f_C(\vec{w})$ cioè $C(\vec{v}+\vec{w}) = C\vec{v} + C\vec{w}$

Considero un vettore qualunque $\vec{b} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

$$\vec{b} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}$$

Grazie alle proprietà precedentemente espresse (■) si dimostra che:

$$f_{AB}(\vec{b}) = (A\cdot B)\vec{b} = A(B\vec{b}) = f_A(f_B(\vec{b}))$$

- $f_{AB}(\vec{b}) = f_{AB}(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3})$

  Ma poiché f_{AB} è un'applicazione lineare

  Applico (2) $= f_{AB}(\vec{b}) = f_{AB}(\alpha\vec{e_1}) + f_{AB}(\beta\vec{e_2}) + f_{AB}(\gamma\vec{e_3}) =$

  Applico (1) $= \alpha f_{AB}(\vec{e_1}) + \beta f_{AB}(\vec{e_2}) + \gamma f_{AB}(\vec{e_3})$

- $f_A(f_B(\vec{b})) = f_A(f_B(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3})) =$

  f_B è un'applicazione lineare, quindi:

$$= f_A(\alpha f_B(\vec{e_1}) + \beta f_B(\vec{e_2}) + \gamma f_B(\vec{e_3})) =$$

f_A è un'applicazione lineare:

$$= \alpha f_A(f_B(\vec{e_1})) + \beta f_A(f_B(\vec{e_2})) + \gamma f_A(f_B(\vec{e_3})) =$$

$$= \alpha f_{AB}(\vec{e_1}) + \beta f_{AB}(\vec{e_2}) + \gamma f_{AB}(\vec{e_3})$$

Adesso invece vediamo la dimostrazione della proprietà ([redacted]):

Consideriamo una matrice C, i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) $C(\lambda\vec{v}) = \lambda(C\vec{v}) \rightarrow$ tesi

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$

$$C \cdot (\lambda\vec{v}) = C \cdot \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix} = \lambda v_1 \, \text{I col} + \lambda v_2 \, \text{II col} + \lambda v_3 \, \text{III col}$$

- $\lambda(C\vec{v}) = \lambda\left(C\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda(v_1 \, \text{I col} + v_2 \, \text{II col} + v_3 \, \text{III col})$

$$C = [\vec{c_1} \mid \vec{c_2} \mid \vec{c_3}]$$

vettori colonna

$$C \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda v_1 \vec{c_1} + \lambda v_2 \vec{c_2} + \lambda v_3 \vec{c_3}$$

$$\lambda(C\vec{v}) = \lambda(v_1\vec{c_1} + v_2\vec{c_2} + v_3\vec{c_3}) =$$

$$= \lambda v_1\vec{c_1} + \lambda v_2\vec{c_2} + \lambda v_3\vec{c_3}$$

(2) $C \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = C\vec{v} + C\vec{w} \rightarrow$ tesi

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

- $C \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = C \cdot \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = (v_1 + w_1)\vec{c_1} + (v_2 + w_2)\vec{c_2} + (v_3 + w_3)\vec{c_3}$

- $C(\vec{v}) + C(\vec{w}) = C\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} =$

$$= v_1\vec{c_1} + v_2\vec{c_2} + v_3\vec{c_3} + w_1\vec{c_1} + w_2\vec{c_2} + w_3\vec{c_3} =$$

$$= (v_1 + w_1)\vec{c_1} + (v_2 + w_2)\vec{c_2} + (v_3 + w_3)\vec{c_3}$$

Esempio:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x+y-z=5 \\ 2x-y+z=7 \end{cases}$$

METODO di ELIMINAZIONE di GAUSS

Sottraggo 1 volta la I riga dalla II e 2 volte la I riga dalla III

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ -2z=-2 \\ -3y-z=-7 \end{cases}$$

Questo è il metodo di eliminazione gaussiana e può essere applicato anche alle matrici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

Scambio la II riga del sistema con la III:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ -3y-z=-7 \\ -2z=-2 \end{cases}$$

Faccio la stessa cosa nella matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

A parte la colonna dei termini noti, la matrice ottenuta è triangolare superiore, perché sotto la diagonale principale ci sono solo 0

Soluzione del sistema:

$$z=1$$

$$-3y-1=-7 \Rightarrow y=2$$

$$x+y+z=7 \Rightarrow x=-y-z+7=$$
$$=-1-2+7=4$$

Soluzioni trovate con la matrice

$E_{1,2}$ → Matrice che sottrae una volta la prima riga dalla seconda e che sottrae due volte la prima riga dalla terza

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}-2a_{11} & a_{32}-2a_{12} & a_{33}-2a_{13} \end{pmatrix}$$

Anziché considerare una matrice generica, si considera la matrice identità:

$$\underset{E_{1,2}}{\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}} \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Qualsiasi matrice, moltiplicata per I dà come risultato se stesso, e dunque

$$E_{1,2} \cdot I = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica che per ogni matrice $A = \begin{pmatrix} \text{riga } 1 \\ \text{riga } 2 \\ \text{riga } 3 \end{pmatrix}$ si ha:

$$E_{1,2}\, A = \begin{pmatrix} \text{riga } 1 \\ \text{riga } 2 - 1\,\text{riga } 1 \\ \text{riga } 3 - 2\,\text{riga } 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

$$E_{12} \cdot A = \left[E_{12} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \middle| E_{12} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \middle| E_{12} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right]$$

$$E_{12} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} a_{11} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_{21} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_{31} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} \\ -a_{11} + a_{21} + 0 \cdot a_{31} \\ -2a_{11} + 0 \cdot a_{21} + a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} - a_{11} \\ a_{31} - 2a_{11} \end{pmatrix}$$

$$E_{12} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} a_{12} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_{22} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_{32} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 0\, a_{32} \\ -a_{12} + a_{22} + 0 \cdot a_{32} \\ -2a_{12} + 0 \cdot a_{22} + a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} - a_{12} \\ a_{32} - 2a_{12} \end{pmatrix}$$

$$E_{12} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} a_{13} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_{23} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_{33} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} \\ -a_{13} + a_{23} + 0 \cdot a_{33} \\ -2a_{13} + 0 \cdot a_{23} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} - a_{13} \\ a_{33} - 2a_{13} \end{pmatrix}$$

$$E_{1,2} \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} \\ a_{31} - 2a_{11} & a_{32} - 2a_{12} & a_{33} - 2a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{I riga} \\ \text{II riga} - \text{I riga} \\ \text{III riga} - 2\,\text{I riga} \end{pmatrix}$$

Esempio
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) = \left[E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| E\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| E\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$$

$$3 \times 3 \quad \cdot \quad 3 \times 4 \quad = \quad 3 \times 4$$

Il numero di colonne della matrice a sinistra deve ~~...~~ essere esattamente il numero di righe della matrice a destra

$$E_{1,2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

Trovare la matrice $P_{2,3}$ che permuta la II riga con la III riga.

- Seguendo il ragionamento fatto per trovare $E_{1,2}$ considero la matrice identità al fine di trovare $P_{2,3}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}}_{P_{2,3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché qualsiasi matrice moltiplicata per I dà come risultato sé stessa, si ha:

$$P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente al caso precedente $P_{2,3}$ non va bene solo se moltiplicata per I, ma anche quando la si moltiplica per una matrice generica.

Ricapitoliamo quanto detto sul prodotto fra matrici quadrate:

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \vec{b} = b_1 \vec{a}_1 + b_2 \vec{a}_2 + \dots + b_n \vec{a}_n$$

$\vec{b}$ vettore di $\mathbb{R}^n$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\qquad$ a_i = vettori colonna di A

Esempio: $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x+y-z=5 \\ 2x-y+z=7 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\\7\end{pmatrix}$$

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{B} = A\cdot\left[\vec{b}_1 \middle| \vec{b}_2 \middle| \dots \middle| \vec{b}_n\right] \overset{\text{definizione}}{=} \left[A\vec{b}_1 \middle| A\vec{b}_2 \middle| \dots \middle| A\vec{b}_n\right]$$

Quindi se $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \left[A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right]$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: le colonne di $A\cdot B$ sono combinazioni lineari di colonne di A.

Il prodotto fra matrici può essere fatto anche righe×colonne:

$$\underset{n\times n}{\underset{A}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}} \cdot \underset{n\times n}{\underset{B}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}} = \underset{n\times n}{\underset{C}{\begin{bmatrix} & & \\ & \boxed{} & \\ & & \end{bmatrix}}}$$

colonna j

riga i

$$c_{ij} = (\text{riga } i \text{ di } A)\cdot(\text{col } j \text{ di } B)$$

prodotto scalare

Secondo l'esempio precedente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = A\cdot B$$

Esempio: $C_{2,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

$$\underset{n\times n}{A} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{b} \xmapsto{f_A} A \cdot \vec{b}$$

f_A è la funzione associata alla matrice A ed è un'applicazione lineare, cioè valgono:

(1) $f_A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda\, f_A(\vec{v})$

(2) $f_A(\vec{v} + \vec{w}) = f_A(\vec{v}) + f_A(\vec{w})$

<u>Moltiplicazione fra matrici non quadrate</u>:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to$ matrice 2×3

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ Questo non si può fare

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Questo si può fare!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Infatti sotto forma di sistema si ha:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ x + 0y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Quindi il numero delle colonne di A deve essere lo stesso delle componenti di $\vec{v}$.

Se ho $A_{n\times m}$ scrivere $A \cdot \vec{b}$ ha senso solo se $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ cioè se ha tante componenti quante sono le colonne di A

$$A \cdot \vec{b} = \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

quindi se applico A al vettore $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ottengo un vettore di $\mathbb{R}^n$

$$A_{n\times m} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$A\cdot\vec{b} \quad \to \vec{b}\in\mathbb{R}^m$$

$$A_{n\times m}\cdot B = A\cdot\big[\underbrace{\vec{b}_1|\dots|\vec{b}_k}_{\text{Vettori di } \mathbb{R}^m}\big] = \big[\underbrace{A\cdot\vec{b}_1|\dots|A\vec{b}_k}_{\text{Vettori di } \mathbb{R}^n}\big]$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \Bigg[\underbrace{A\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Bigg| A\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{Vettori di } \mathbb{R}^2}\Bigg] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$\underset{n\times m}{A}\cdot\underset{m\times k}{B}$ ha senso solo quando il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B (B può avere un numero k qualsiasi di colonne).
Il risultato è una matrice che ha n righe e k colonne.

$$\underset{n\times m}{A}\cdot\underset{m\times k}{B} = \underset{n\times k}{C}$$

Consideriamo le funzioni corrispondenti:

$f_{AB} = f_A\circ f_B$ sappiamo che vale con A e B matrici quadrate. Vediamo se è giusto anche per le matrici non quadrate

[Anticipo: Tutte e sole le applicazioni lineari corrispondono a matrici]

Esempio: $A_{2\times 3}$ $B_{3\times 2}$

$f_A: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ $f_B: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

Se prodotto di matrice $\longmapsto$ Composizione di funzioni

$$f_{AB} = f_A\circ f_B$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_A\circ f_B"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Questo si può fare perché l'immagine di f_B è inclusa nel dominio di f_A

Dimostriamo che $f_{AB} = f_A\circ f_B$ vale anche nel caso di matrici non quadrate

Consideriamo $A_{2\times 3}$ $B_{3\times 4}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$

$$A \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad B \rightsquigarrow f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$A \cdot B \rightsquigarrow f_{AB} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

$$f_{AB} = f_A \circ f_B$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 \arrow[r, mapsto, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{AB}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, mapsto, "f_B"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Voglio dimostrare che $f_{AB}(\vec{b}) = (A \cdot B) \cdot \vec{b} = A(B\vec{b}) = f_A(f_B(\vec{b}))$

- $f_{AB}(\vec{b}) = f_{AB}(\alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} + \gamma \vec{e_3} + \delta \vec{e_4})$

f_{AB} è un'applicazione lineare:

$$f_{AB}(\vec{b}) = f_{AB}(\alpha\vec{e_1}) + f_{AB}(\beta\vec{e_2}) + f_{AB}(\gamma\vec{e_3}) + f_{AB}(\delta\vec{e_4}) =$$
$$= \alpha f_{AB}(\vec{e_1}) + \beta f_{AB}(\vec{e_2}) + \gamma f_{AB}(\vec{e_3}) + \delta f_{AB}(\vec{e_4})$$

- $f_A(f_B(\vec{b})) = f_A(f_B(\alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3} + \delta\vec{e_4}))$

f_B è un'applicazione lineare:

$$f_A(f_B(\vec{b})) = f_A(\alpha f_B(\vec{e_1}) + \beta f_B(\vec{e_2}) + \gamma f_B(\vec{e_3}) + \delta f_B(\vec{e_4})) =$$

f_A è un'applicazione lineare:

$$f_A(f_B(\vec{b})) = \alpha f_A(f_B(\vec{e_1})) + \beta f_A(f_B(\vec{e_2})) + \gamma f_A(f_B(\vec{e_3})) + \delta f_A(f_B(\vec{e_4})) =$$
$$= \alpha f_{AB}(\vec{e_1}) + \beta f_{AB}(\vec{e_2}) + \gamma f_{AB}(\vec{e_3}) + \delta f_{AB}(\vec{e_4})$$

Si sa che valgono le seguenti proprietà:

- $C(A+B) = CA + CB$ dove $A+B = G$, $g_{ij} = a_i + b_j$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Queste proprietà possono essere dimostrate in due modi:

I) Conti a partire dalle definizioni
II) Applicazioni lineari corrispondenti

Dimostriamo la terza proprietà con il metodo II) ma prima ripassiamo alcuni concetti sulla composizione di funzione:

Esempio: $f(x) = x+1$ $\quad g(x) = 2x$ $\quad h(x) = x^2$

$$(f \circ (g \circ h))(x) \overset{?}{=} ((f \circ g) \circ h)(x)$$

$$g \circ h = 2x^2 \Rightarrow f \circ (g \circ h) = 2x^2 + 1$$

$$f \circ g = 2x + 1 \Rightarrow h(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g) \circ h = 2x^2 + 1$$

$(f\circ(g\circ h))(x) = ((f\circ g)\circ h)(x) = 2x^2+1$

Per definizione: $(\varphi\circ\psi)(x) = \varphi(\psi(x))$

In generale: $(f\circ(g\circ h))(x) \overset{?}{=} ((f\circ g)\circ h)(x)$

I $\quad x \xmapsto{g\circ h} (g\circ h)(x) \xmapsto{f} f((g\circ h)(x))$

II $\quad x \xmapsto{h} h(x) \xmapsto{f\circ g} (f\circ g)(h(x))$

I $\quad x \xmapsto{h} h(x) \xmapsto{g} g(h(x)) \xmapsto{f} f(g(h(x)))$

II $\quad x \xmapsto{h} h(x) \xmapsto{g} g(h(x)) \xmapsto{f} f(g(h(x)))$

Quindi è vero che: $(f\circ(g\circ h))(x) = ((f\circ g)\circ h)(x)$

Adesso è possibile dimostrare che: $A(BC) = (AB)C \rightarrow$ Tesi

$$f_{A(BC)} = f_A\circ f_{BC} = f_A\circ(f_B\circ f_C) = (f_A\circ f_B)\circ f_C =$$
$$= f_{AB}\circ f_C = f_{(AB)C}$$

$$f_{A(BC)} = f_{(AB)C} \overset{?}{\Longrightarrow} A(BC) = (AB)C$$

Questo sarà vero per la seguente proposizione, che verrà dimostrata in futuro:

PROPOSIZIONE: $f_A = f_B \Rightarrow A = B$

La matrice inversa:

$I \rightarrow$ matrice identità $n\times n$

$f_I = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la funzione identità

$$A\cdot I = I\cdot A = A$$
$$f_{AI} = f_A\circ f_I = f_A\circ id = f_A$$
$$f_{IA} = f_I\circ f_A = id\circ f_A = f_A$$

$A^{-1} \rightarrow$ matrice inversa (SE ESISTE) $\quad A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$

Se si ha $A\vec{x} = \vec{b}$ sistema lineare $n\times n$, trovando A^{-1} si può risolvere il sistema, perché:

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Esempio $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A\vec{x} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$ è la matrice inversa di A, infatti:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Come si trova la matrice inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{Cerco } A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa scrittura equivale a risolvere i due sistemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per risolverli velocemente si usa il metodo di Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Applico il metodo di Gauss a questa matrice:

II riga $-$ 2 $\cdot$ I riga: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

La parte dell'algoritmo di Gauss è terminata perché la parte sinistra della matrice (quella dei coefficienti) è diventata triangolare superiore.

Il metodo di Gauss-Jordan serve a ottenere la matrice identità al posto di quella dei coefficienti:

I riga $-$ 2 II riga $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$

La parte destra della matrice è la matrice inversa A^{-1}

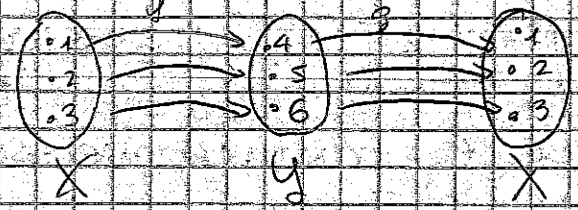
Matrice invertibile:

Dal momento che il prodotto fra matrici non è commutativo, in generale l'inverso destro e l'inverso sinistro sono due concetti diversi.

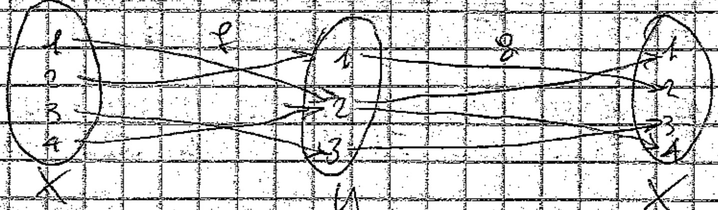
$f: X \to Y$ è iniettiva se e solo se esiste un'inversa sinistra, cioè

$$g \circ f = Id\, X$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "Id"] & Y \arrow[r, mapsto, "g"] & X \end{tikzcd}$$



Esempio con f non iniettivo:



$$f(1) = f(4)$$

Esiste l'inverso sinistro $\Rightarrow$ Iniettiva

($\neg$ iniettiva $\Rightarrow \neg \exists$ inverso sinistro)

l'esempio precedente è stato costruito in base a questa implicazione

$f: X \to Y$ è suriettiva se e solo se esiste un'inverso destro, cioè:

$$f \circ g = Id\, Y$$

Dimostrazione per l'iniettività:

Questa dimostrazione si basa sul fatto che per ogni $x \in X$ pongo $g(f(x)) = x$, quindi definisco g su tutto l'insieme immagine di f. Sugli altri elementi di Y definisco g come voglio. Segue dalla definizione che $g(f(x)) = x \ \forall x \in X$.

N.B.: La definizione è ben posta perché non succede che $f(x) = f(x')$ per $x \neq x'$, visto che f è iniettiva.

f è iniettiva $\overset{1}{\underset{2}{\Longleftrightarrow}}$ sse $\exists g$ t.c. $g \circ f = Id_X$

1) f è iniettiva, cioè $x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

definisco $g(y) = \begin{cases} x & \text{se } y = f(x) \\ \text{come voglio} & \text{se } y \neq f(x) \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = Id\ x$

2) $\exists g\ (g \circ f)(x) = Id_X \Rightarrow f$ è iniettiva

Controreciproca:

f non è iniettiva $\Leftrightarrow \exists x_1 \neq x_2 \in X$ taliche $f(x_1) = f(x_2)$

$\exists g$ t.c. $(g \circ f)(x) = Id\ x$

$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$

$x_1 = x_2$

Ma questo non è possibile perché inizialmente era stato posto $x_1 \neq x_2$, quindi siamo giunti a una contraddizione, perciò f è iniettiva.

Dimostrazione per la suriettività:

f è suriettiva $\overset{1}{\underset{2}{\Longleftrightarrow}}$ sse $\exists g$ t.c. $f \circ g = Id_Y$

1) f è suriettiva $\Rightarrow$ $\exists g$ tale che $f \circ g = id_Y$ ~~...~~

~~...~~ Visto che f è suriettiva,

$\forall y \in Y\ \exists x_y \in A$ t.c. $f(x_y) = y$

$g(y) = Im(f_A)$ Definisco $g: Y \to X$

ponendo $g(y) = x_y$. Chiaramente:

$f(g(y)) = f(x_y) = y$

2) $\exists g$ t.c. $f(g(y)) = y \Rightarrow f$ è suriettiva

~~...~~

Per ipotesi $\forall y \in Y \; f(g(y)) = y$,

dunque $\forall y \in Y \; y \in \mathrm{Im} f$.

, perciò f è suriettiva

Queste condizioni sull'inversa destra e sinistra valgono anche per le matrici:

Matrice $A_{n \times m}$

$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ applicazione lineare:

$$1)\; f_A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda f_A(\vec{v})$$

$$2)\; f_A(\vec{v} + \vec{w}) = f_A(\vec{v}) + f_A(\vec{w})$$

Esempio: $\underset{3\times 2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f_A\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$= 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f_A\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{n \times m} \quad A_{3 \times 2}$$

$B \cdot A$ si può fare solo se $m = 3$; inoltre se come risultato si vuole ottenere una matrice quadrata si deve avere $n = 2$. In questo caso l'inversa sinistra, se c'è, deve per forza avere 2 righe e 3 colonne. $(B_{2\times 3})$

B può anche essere l'inversa destra? NO, vedremo poi perché.
~~No, perché A·B dà un'identità di dimensione 3x3 mentre facendo B·A si ottiene una $I_{2\times 2}$, quindi i due prodotti non forniscono la stessa identità come risultato~~

(Anticipo: se A è $n \times m$ (cioè se $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$), se $m < n$ A non può avere l'inversa destra perché f_A non può essere suriettiva; se $m > n$ allora A non può avere l'inversa sinistra perché f_A non può essere iniettiva.)

Per esempio se $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, applicazione lineare, f_A non può essere suriettiva perché $2<3$.

Rimane solo il caso in cui $m=n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

A ha un'inversa sinistra, cioè $\exists B$ t.c. $BA = I$ (deve essere $B_{2\times 3}$, quindi $I_{2\times 2}$)

Inversa di matrici quadrate:

Anticipo: Si hanno due possibilità:

1) Non esistono né l'inversa destra né la sinistra
2) Esistono sia l'inversa destra che la sinistra e coincidono

■ Se esiste $\vec{v} \neq 0$ t.c. $A\vec{v} = 0$ allora A non è invertibile

Questo perché se A fosse invertibile si potrebbe dedurre che:

$$\underbrace{A^{-1}(A}_{I} \cdot \vec{v}) = A \cdot 0 = 0$$

$$I \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

(Cioè supponendo A invertibile, se $A\cdot\vec{v} = 0$, allora $\vec{v} = 0$).

Teorema: A invertibile $\Rightarrow$ "se $A\vec{v} = 0$, allora $\vec{v} = 0$"

DIM. Se ciò non vale, cioè se $\exists\ \vec{v} \neq 0$ e $A \cdot \vec{v} = 0$ allora A non è invertibile.

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi A non è invertibile

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Quando si ha una colonna di 0 la matrice non è invertibile.

Ma ci sono matrici non invertibili che non hanno 0 in nessun posto.

Il fatto che A non è invertibile si può capire anche perché ~~per~~ $\exists \vec{v} \neq 0$, $A\vec{v} = 0 \Rightarrow A$ non è invertibile:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per esempio se $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ allora $\vec{v} \neq 0$ ($\vec{v} = \vec{e_2}$) e si ottiene comunque $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ come risultato.

se $A = \begin{bmatrix} \vec{a_1} & | & \dots & | & \vec{a_n} \end{bmatrix}$ $A \cdot \vec{e_i} =$ i-esima colonna di A

$$\begin{bmatrix} \vec{a_1} & | & \dots & | & \vec{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\vec{a_1} + 0 \cdot \vec{a_2} + \dots + 1\vec{a_i} + 0\vec{a_n} = \vec{a_i}.$$

vettore $\vec{e_i}$

(1 è nella i-esima posizione)

Se ci sono due colonne uguali la matrice non è invertibile:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Succede se $b = 0$ e $a = -c$ (per esempio $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$)

Vale lo stesso se una colonna è il triplo (multiplo) dell'altra:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ -9 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = 0, \quad a = 1, \quad b = -3$$

Se A ha una riga di 0 la matrice non è invertibile

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 22 & 17 & 33 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 25 \end{bmatrix}$$

Se si moltiplica per un'altra matrice B si ottiene una riga di tutti 0 anche nel risultato. Ma se si vuole trovare l'inversa significa trovare A^{-1} t.c.

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma qualsiasi matrice che sia moltiplicata per A, dà una matrice con una riga di 0, cosa che non c'è nella matrice identità.

Troviamo l'inversa della matrice ~~data~~ con il metodo di Gauss-Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sottraggo $\frac{1}{3}$ · I riga dalla II riga:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right]$$

Le mosse dell'algoritmo di Gauss ci hanno portato ad avere una matrice triangolare (la parte sinistra), ma deve diventare la matrice identità:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}\,r - \frac{3}{2}\,\mathrm{II}\,r \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3}\,\mathrm{I}\,r \\ \frac{3}{2}\,\mathrm{II}\,r \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

questo è la matrice inversa A^{-1}

Vediamo un altro esempio:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sottraggo $\frac{1}{2}$ I riga alla II riga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sottraggo $\frac{2}{3}$ II riga dalla III riga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

Sottraggo $\frac{2}{3}$ II riga dalla I riga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

Aggiungo 2 III riga alla I riga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

Sottraggo 3 III riga dalla II

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3/2 & 0 & -3/2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{2}$ · I riga
$\frac{2}{3}$ · II riga
3 · III riga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Nel primo esempio per effettuare il 1° passaggio è stato adoperato una matrice E tale che:

E = sottrae $\frac{1}{3}$ della I riga dalla II riga

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}}_{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c-\frac{1}{3}a & d-\frac{1}{3}b \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix}$$

Ma poiché $E \cdot I = E$ allora $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{1}{3}a+c & -\frac{1}{3}b+d \end{bmatrix}$$

quindi $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad E_2 \cdot E_1 A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}$ $\quad \underbrace{D\, E_2 \cdot E_1}_{B} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Moltiplico per 1/3 la 1° riga e per 3/2 la 2° riga

$B \cdot A = I \Rightarrow B = A^{-1}$

$$B = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$