Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 14 Gennaio 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse (scritte in forma cartesiana) della seguente equazione:

$$z^6 + 64 = 0$$

Esercizio 2. **[10 pt.]**
Si consideri il seguente sistema lineare, dove b_1, b_2, b_3 sono numeri reali qualunque:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & b_1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & b_2 \\ & - & 2x_2 & + & 6x_3 & & & = & b_3 \end{cases}$$

e sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare corrispondente.

1. Determinare la dimensione di $\ker(T)$ e trovarne una base.
2. Determinare la dimensione di $\mathrm{Imm}(T)$ e trovarne una base.
3. Descrivere l'insieme di tutte le soluzioni del sistema nel caso in cui $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = -2$.

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.

2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.

3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Esercizio 4. **[8 pt.]** OK Consideriamo il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \right\}.$$

1. Trovare una base di W.

2. Trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $W + \mathrm{span}\{v\} = \mathbb{R}^4$.

3. Trovare, se esiste, una matrice A di dimensioni 4×4 tale che:

   - A è diagonalizzabile.
   - Gli unici autovalori di A sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.
   - L'autospazio dell'autovalore $\lambda = 1$ coincide con W, cioè $\mathrm{Aut}_A(1) = W$.