Appello di Algebra Lineare
10 novembre 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Consideriamo un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad F\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

(1) Determinare il nucleo (kernel) e l'immagine di F. [*Aiuto:* Per il nucleo calcolare prima la sua dimensione.]
(2) Scrivere la matrice *dell'applicazione inversa* F^{-1} rispetto alle basi standard (canoniche).
(3) Scrivere la matrice dell'applicazione $F^{-1} \circ F^{-1}$ rispetto alle basi standard (canoniche).

Soluzione. (1) Siccome gli elementi della base standard $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ sono nell'imagine di F, l'immagine deve essere $\mathbb{R}^2$. Per la formula della dimensione il nucleo ha allora dimensione $2 - 2 = 0$, quindi è uguale a 0.

(2)

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}9 & 5\\25 & 14\end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 2. Sia r un parametro reale, e consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Per quali valori di r la matrice ha esattamente 3 autovalori reali distinti?
(2) Per quali valori di r la matrice ha esattamente 2 autovalori reali distinti?
(3) Per quali valori di r la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

Soluzione. Il polinomio caratteristico della matrice è $P(t) = (1-t)[(1-t)^2 - r]$. Vediamo subito che per $r < 0$ il polinomio ammette solo 1 come radice reale, con molteplicità 1. Quindi in questo caso la matrice non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Se $r = 0$ il polinomio ammette come radice 1 (con molteplicità 3). In tutti gli altri casi le tre radici sono distinte. Quindi per (1) la risposta è $r > 0$ e per (2) nessun valore.

Nel caso (1) la matrice è sempre diagonalizzabile. Nel caso $r = 0$ si calcola che l'autospazio di 1 ha dimensione 2. Quindi la matrice è diagonalizzabile se e solo se $r > 0$. $\square$

Esercizio 3. Sia

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

e sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il nucleo (kernel) dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = 3x + 5y + 2z.$$

(1) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $V + W$.
(2) Determinare la dimensione dello spazio vettoriale $V \cap W$.
(3) Trovare una base di $V \cap W$.

Soluzione. Risolvendo il sistema con un'unica equazione lineare $f(x, y, z) = 0$ si trova una base di W: ad esempio $\begin{bmatrix} -5/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si verifica facilmente che insieme al vettore $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di V questi vettori danno una base di $\mathbb{R}^3$, dunque

$$\dim(V + W) = 3,$$

e per la formula della dimensione

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Si verifica facilmente che

$$\begin{bmatrix} -5/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dunque $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ è una base di $V \cap W$. Alternativamente, si poteva imporre il sistema

$$\alpha \begin{bmatrix} -5/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, che avrebbe portato rapidamente a un multiplo della soluzione proposta. $\square$

Esercizio 4. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dato dalle soluzioni dell'equazione $x+y+z=0$.

(1) Trovare un vettore $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ di norma 1 tale che $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ sia una base ortogonale di V.

(2) Trovare un vettore di norma 3 in $V^{\perp}$.

Soluzione. Per la (1), bisogna trovare un vettore $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ tale che $a+b+c=0$, $a+b-2c=0$ e $a^2+b^2+c^2=1$. Le prime due equazioni danno $c=0$, e quindi rimangono le equazioni $a+b=0$ e $a^2+b^2=1$: a questo punto si trova facilmente la soluzione $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, che ha la forma desiderata.

Per la (2), un vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ è in $V^{\perp}$ se e solo se soddisfa il sistema di equazioni $x+y-2z=0$ e $x/\sqrt{2}-y/\sqrt{2}=0$: le soluzioni del sistema sono $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, e ora la condizione che la norma sia 3 ci dà $\sqrt{3\lambda^2}=3$, e quindi ad esempio il vettore $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ha le proprietà desiderate. □