ETI 13/1/2025

- $\sum_{i\in I} k_i = \operatorname{Max}\{\sup_{i\in I} k_i, |I|\}$ SOMME INFINITE DI CARDINALI INFINITI

- $\prod_{\alpha<\nu} k_\alpha = \left(\sup_{\alpha<\nu} k_\alpha\right)^\nu$ PRODOTTO INFINITO di CARDINALI INFINITI

$\downarrow$

Vale se l'insieme degli indici è un CARDINALE e se $(k_\alpha \mid \alpha<\nu)$ è debolmente crescente.

- $\left(\prod_{i\in I} k_i\right)^\nu = \prod_{i\in I} k_i^\nu$

K^ν

- $\prod_{i\in I} K^{\nu_i} = K^{\sum_{i\in I}\nu_i}$

Hausdorff: base successore $K=\mu^+$

- $(\mu^+)^\nu = \mu^\nu \cdot \mu^+$

BASE κ cardinale limite.

Esempio

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \left(\sup_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1} = \left[\left(\sup_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_0}\right]^{\aleph_1} =$$

$(\aleph_n \mid n<\omega)$ crescente e l'insieme di indici ω e' un cardinale

$$= \left(\prod_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1}$$

Per Hausdorff $\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_{n-1}^{\aleph_1} \cdot \aleph_n = \dots = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_n = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n$

$$= \prod_{n<\omega} \left(2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n\right) = \left(\sup_{n<\omega} 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n\right)^{\aleph_0} =$$

$$= \left(2^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1 \cdot \aleph_0} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}.$$

N.B. $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\mathrm{Cof}(\aleph_\omega)} > \aleph_\omega$

$$\boxed{\aleph_\omega^{\aleph_1} = \mathrm{Max}\{2^{\aleph_1}, \aleph_\omega^{\aleph_0}\}}$$

Osserviamo che $\sup\limits_{n<\omega} 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n =$

$$\sup_{n<\omega} \{ \mathrm{Max}\{2^{\aleph_1}, \aleph_n\} \} = \sup_{n<\omega} \{ 2^{\aleph_1}, \aleph_n \} = \mathrm{Max}\{2^{\aleph_1}, \aleph_\omega\}$$

$$= 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega .$$

(A) κ limite e $\nu \geq \mathrm{Cof}(\kappa)$.

Esempio $\kappa = \aleph_\omega$
$\nu = \aleph_0$

Allora: $\boxed{\kappa^\nu = \left(\sup\limits_{\mu<\kappa} \mu^\nu \right)^{\mathrm{cof}\,\kappa}}$

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \left(\sup_{n<\omega} \aleph_n \right)^{\aleph_1} \neq \sup_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1}$$

(B) κ limite e $\nu < \mathrm{Cof}(\kappa)$

Allora: $\boxed{\kappa^\nu = \sup\limits_{\mu<\kappa} \mu^\nu}$

DIM. (A)

Visto κ e' limite, se $\xi = \mathrm{Cof}(\kappa)$ allora esiste una sequenza crescente $(\kappa_i \mid i \in \xi)$ t.c. $\sup_{i \in I} \kappa_i = \kappa$.

Ad esempio, se vale GCH

$$\aleph_n^{\aleph_1} \overset{\text{Hausdorff}}{=} \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_n = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n = \aleph_2 \cdot \aleph_n = \aleph_n \quad (n \geq 2)$$

$$\sup_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_\omega$$

ma $\aleph_\omega^{\aleph_1} \geq \aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega$.

$$\kappa^\nu = \left(\sup_{i\in\xi} \kappa_i\right)^\nu = \left[\left(\sup_{i\in\xi} \kappa_i\right)^\xi\right]^\nu = \left(\prod_{i\in\xi} \kappa_i\right)^\nu =$$

$$(\xi = \mathrm{Cof}\,\kappa \leq \nu)$$

$$= \prod_{i\in\xi} \kappa_i^\nu = \left(\sup_{i\in\xi} \kappa_i^\nu\right)^\xi = \left(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu\right)^{\mathrm{cof}\,\kappa} \quad \blacksquare$$

DIM. (B) κ^ν dove κ limite e $\nu < \mathrm{Cof}\,\kappa$

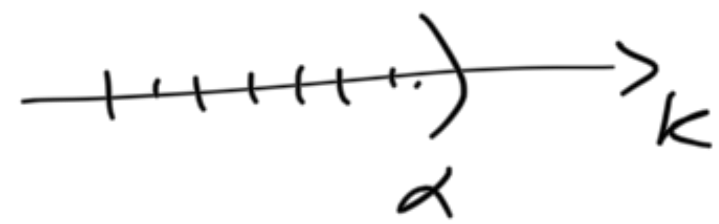
Esempio $\kappa = \aleph_{\omega_1}$ e $\nu = \aleph_0 < \mathrm{Cof}(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1$

$\mathrm{Cof}(\aleph_\lambda) =$
$\mathrm{Cof}\,\lambda$

per ogni λ limite

$$\kappa^\nu = |\mathrm{Fun}(\nu,\kappa)|$$

Visto che $\nu < \mathrm{Cof}(\kappa)$ allora ogni funzione $f:\nu \to \kappa$ e' limitata e quindi $\exists\, \alpha < \kappa$ t.c. $f:\nu \to \alpha$



Quindi $\mathrm{Fun}(\nu,\kappa) = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu,\alpha)$.

$$\kappa^\nu = \Big|\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu,\alpha)\Big| \le \sum_{\alpha<\kappa} |\mathrm{Fun}(\nu,\alpha)| = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\nu =$$

$$= \mathrm{Max}\{\sup_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\nu, \kappa\} = \mathrm{Max}\{\sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu, \kappa\} = \sup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$$

Notiamo che $\mu^\nu \geq \mu$ e quindi $\sup_{\mu<\kappa} \mu^k \geq \sup_{\mu<\kappa} \mu = \kappa$

(qui serve che κ sia limite) ∎

Esercizio (c) Se ν e' limite, allora $\kappa^{\nu} = (\kappa^{<\nu})^{\mathrm{cof}\,\nu}$

dove $\kappa^{<\nu} = \sup\limits_{\mu<\kappa} \kappa^{\mu}$.

Esempio $2^{\aleph_\omega} = \aleph_0^{\aleph_\omega} = \Big(\sup\limits_{n<\omega} \aleph_0^{\aleph_n}\Big)^{\aleph_0} =$ $\mathrm{cof}(\aleph_\omega)$

$= \Big(\sup\limits_{n<\omega} 2^{\aleph_n}\Big)^{\aleph_0}$. Supponiamo che $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+3}$ per ogni $n<\omega$

Allora $2^{\aleph_\omega} = \Big(\sup\limits_{n<\omega} \aleph_{n+3}\Big)^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$

SOLUZIONE: Sappiamo che esiste una sequenza crescente $(\nu_i \mid i \in \mathrm{Cof}\,\nu)$ t.c. $\sup\limits_{i\in\mathrm{Cof}\,\nu} \nu_i = \nu$, e quindi

$$\sum_{i\in\mathrm{Cof}\,\nu} \nu_i = \mathrm{Max}\Big\{\sup_{i\in\mathrm{Cof}\,\nu} \nu_i,\ \mathrm{cof}\,\nu\Big\} = \mathrm{Max}\{\nu, \mathrm{Cof}\,\nu\} = \nu.$$

$$\kappa^{\nu} = \kappa^{\sum_{i\in\mathrm{Cof}\,\nu} \nu_i} = \prod \kappa^{\nu_i} = \Big(\sup \kappa^{\nu_i}\Big)^{\mathrm{Cof}\,\nu} = (\kappa^{<\nu})^{\mathrm{Cof}\,\nu}$$

$$\ldots_{i\in \mathrm{Cof}\,\nu} \qquad \Big(\ldots_{i \in \mathrm{Cof}\,\nu} \Big) \qquad \ldots \quad \square$$

<u>Esercizio</u> $$\sup_{i\in I} \kappa_i \cdot \mu_i = \Big(\sup_{i\in I} \kappa_i\Big)\cdot\Big(\sup_{i\in I} \mu_i\Big)$$

<u>SOLUZIONE</u> $$\sup_{i\in I} \kappa_i\cdot\mu_i = \sup_{i\in I}\big(\mathrm{Max}\{\kappa_i,\mu_i\}\big) = \sup_{i\in I}\big(\{\kappa_i \mid i\in I\}\cup\{\mu_i \mid i\in I\}\big)$$

$$= \mathrm{Max}\Big\{\sup_{i\in I}\kappa_i, \sup_{i\in I}\mu_i\Big\} = \Big(\sup_{i\in I}\kappa_i\Big)\cdot\Big(\sup_{i\in I}\mu_i\Big).$$

<u>Esercizio</u> (✱) Per quali α vale la proprieta': "$A, B \in V_\alpha \Rightarrow A\times B \in V_\alpha$"?

<u>SOLUZIONE</u> <u>$\alpha = \lambda$ limite</u> OK

Infatti se α e' limite, $V_\alpha \models$ coppie, $V_\alpha \models$ unione, $V_\alpha \models$ Potenza, $V_\alpha \models$ Separazione.
Ripetendo la dimostrazione dell'esistenza dei prodotti cartesiani,

Si ottiene che $A, B \in V_\alpha \Rightarrow A \times B \in V_\alpha$.

$$A \times B = \{ y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A \ \exists b \in B \ \ y = \{\{a\}, \{a,b\}\} \}.$$

Notiamo che esistono ordinali successori α che soddisfano la proprietà $(\star)$, e esistono ordinali successori che NON la soddisfano.

Per esempio la proprietà vale in $V_{\omega+1}$. Infatti se $\underline{A, B \in V_{\omega+1}}$ allora $A, B \subseteq V_\omega$. Quindi se $a \in A$ e $b \in B$ ho che $a, b \in V_\omega$, quindi $\exists n < \omega$ $a, b \in V_n$. Ma allora $\{a\}, \{a,b\} \in V_{n+1}$ e $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \in V_{n+2} \subseteq V_\omega$

Abbiamo visto che $\forall a \in A \ \forall b \in B \ \ (a,b) \in V_\omega$, cioè

$$A \times B \subseteq V_\omega \Rightarrow \underline{A \times B \in V_{\omega+1}}.$$

Più in generale si può ripetere questa dimostrazione per vedere che se $\alpha = \lambda + 1$ dove λ è limite allora la proprietà $(\star)$ vale.

Vediamo infine il caso di α "doppio successore", cioè $\alpha = \beta + 2$ per qualche β. In questo caso $(\star)$ NON vale.

Per esempio, consideriamo $V_{\omega+2}$. Il caso generale è analogo.

Sia $A = B = \omega + 1 \in V_{\omega+2}$. Notiamo che $(\omega+1)\times(\omega+1) \notin V_{\omega+2}$.

Infatti, se per assurdo $(\omega+1)\times(\omega+1) \in V_{\omega+2}$, allora

$$(\omega \times 1) \times (\omega \times 1) \subseteq V_{\omega+1}.$$

Ma $\{\omega\} \in \{\{\omega\}\} = (\omega,\omega) \in (\omega+1)\times(\omega+1) \subseteq V_{\omega+1}$, cioè

$\{\omega\} \in (\omega,\omega) \in V_{\omega+1} \Longrightarrow$ (per transitività)

$\{\omega\} \in V_{\omega+1}$, cioè $\{\omega\} \subseteq V_\omega$, cioè $\omega \in V_\omega$ ↯.

$\blacksquare$

Può capitare che $A \times A \subseteq A$?

Può capitare che

Sì perché ad esempio $V_\lambda \times V_\lambda \subseteq V_\lambda$ per ogni λ limite.

Infatti $a, b \in V_\lambda \Rightarrow \exists \gamma < \lambda \quad a, b \in V_\gamma \Rightarrow$

$\{a\}, \{a, b\} \in V_{\gamma+1} \Rightarrow (a, b) \in \{\{a\}, \{a, b\}\} \in V_{\gamma+2} \subseteq V_\lambda$

Quindi $\forall a, b \in V_\lambda \quad (a, b) \in V_\lambda$, cioè $V_\lambda \times V_\lambda \subseteq V_\lambda$.

Può capitare che $A \subseteq A \times A$?

Non sempre! Ad esempio $\emptyset \in V_\omega$ ma $\emptyset \notin V_\omega \times V_\omega$

In realtà, se vale l'assioma di Fondazione,

NON succede MAI (tranne quando $A = \emptyset$)

Infatti prendiamo $a_0 \in A$. Se $A \subseteq A \times A$, allora

$a_0 \in A \times A$, cioè $\exists a_1, b \in A$ tali che $a_0 = (a_1, b)$.

Notiamo che $a_1 \in \{a_1\} \in \{\{a_1\}, \{a_1, b\}\} = (a_1, b) = a_0$, quindi $a_1 \in \{a_1\} \in a_0$. Come sopra, da $a_1 \in A$ e $A \subseteq A \times A$ segue che $\exists a_2, b' \in A$ tali che $a_1 = (a_2, b')$ e quindi $a_2 \in \{a_2\} \in \{\{a_2\}, \{a_2, b'\}\} = (a_2, b') = a_1$, quindi $a_2 \in \{a_2\} \in a_1$. Itero il procedimento ed ottengo una catena discendente

$$a_0 \ni \{a_1\} \ni a_1 \ni \{a_2\} \ni a_2 \ni \dots$$

contro l'assioma di Fondazione.

//

<u>Esercizio</u> Per quali γ vale $\mathrm{Fun}(\omega, V_\gamma) \subseteq V_\gamma$.

SOLUZIONE $\quad f:\omega\to V_\gamma$. Mi chiedo se $f\in V_\gamma$.

Se $\gamma=\alpha+1$ è successore, in genere NON vale.

Ad esempio sia $f:\omega\to V_{\alpha+1}$ la funzione $f: n\mapsto\alpha$.

Allora $f\notin V_{\alpha+1}$, altrimenti $f\subseteq V_\alpha$. Ma allora avrei

$$\alpha\in\{\alpha,0\}\in\{\{0\},\{\alpha,0\}\}=(0,\alpha)\in f\subseteq V_\alpha\text{, cioè}$$

$$\alpha\in\{\alpha,0\}\in(0,\alpha)\in V_\alpha \Longrightarrow \text{(per transitività) } \alpha\in V_\alpha \ \lightning$$

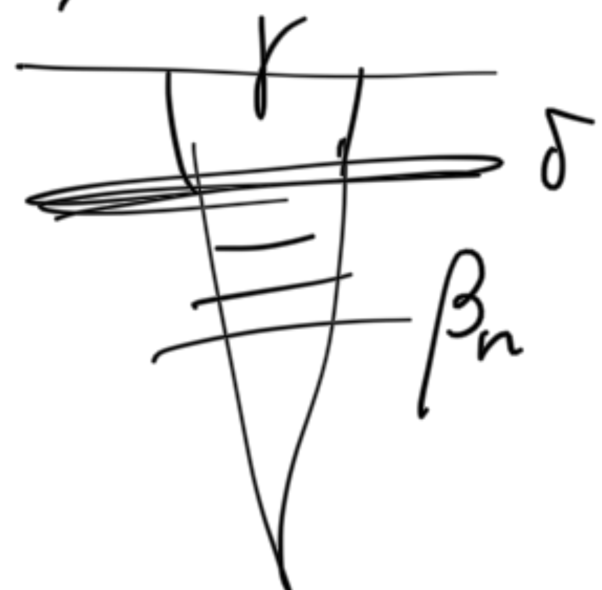
Ci sono anche γ limite per i quali la proprietà NON vale.

Ad esempio sia $f:\omega\to V_\omega$ la funzione identità $f: n\mapsto n$.

Allora $f\notin V_\omega$, altrimenti $f\in V_\omega \Longrightarrow f$ finita mentre f contiene un numero infinito di coppie ordinate.

- Se $\operatorname{Cof}\gamma>\aleph_0$ allora la proprietà vale: $\operatorname{Fun}(\omega,V_\gamma)\subseteq V_\gamma$.

Prendiamo $f : \omega \to V_\gamma$. Per ogni n, esiste $\beta_n < \gamma$ t.c. $f(n) \in V_{\beta_n}$. L'insieme $\{\beta_n \mid n < \omega\} \subseteq \gamma$ e' numerabile e quindi, per l'ipotesi, e' limitato, cioe'



$\exists\, \delta < \gamma$ t.c. $\delta > \beta_n$ per ogni n.

Ma allora $\forall n$ $f(n) \in V_{\beta_n} \subseteq V_\delta$.

Quindi in realta' $f : \omega \to V_\delta$. Ma e' facile vedere che se $A, B \in V_\lambda$ e $f : A \to B$ anche $f \in V_\lambda$. Nel nostro caso, $\omega, V_\delta \in V_\gamma$ e $f : \omega \to V_\delta \Rightarrow f \in V_\gamma$.

■ Se $Cof(\gamma) \leq \aleph_0$ allora esistono $f : \omega \to V_\gamma$ t.c. $f \notin V_\gamma$.

Per l'ipotesi esiste $f : \omega \to \gamma$ illimitata.

Chiaramente $f : \omega \to V_\gamma$, visto che $\gamma \subseteq V_\gamma$.

Chiaramente $f:\omega\to\gamma$,

Se per assurdo $f \in V_\gamma$, allora anche $\mathrm{Im} f \in V_\gamma$. Ma allora anche $\bigcup \mathrm{Im} f \in V_\gamma$, e questo è l'assurdo perché $\bigcup \mathrm{Im} f = \gamma$, visto che f è illimitata. ($\gamma \notin V_\gamma$!)

Esercizio

$f \in V_\alpha \Longrightarrow \mathrm{dom} f, \mathrm{Imm} f \in V_\alpha$

[Ricordare che se $X \in V_\alpha \Longrightarrow \bigcup X \in V_\alpha$]