Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 6 Febbraio 2025

**Tutte le risposte devono essere giustificate**

Buon lavoro!

**Esercizio 1.** Sull'insieme $\mathbb{N}[X]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{N}$ si consideri la seguente relazione:

$$P(X) \prec Q(X) \iff \lim_{n\to\infty}(Q(n) - P(n)) > 0.$$

1. Dimostrare che $\prec$ è un buon ordine.
2. Trovare l'ordinale $\alpha$ tale che $(\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\alpha, \in)$.

**Soluzione.** L'applicazione $\varphi : \mathbb{N}[X] \to \omega^\omega$ definita ponendo:

$$\varphi : a_k X^k + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \ \longmapsto\ \omega^k a_k + \ldots + \omega^2 a_2 + \omega a_1 + a_0 \in \omega^\omega$$

è un isomorfismo tra insiemi ordinati $\varphi : (\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\omega^\omega \setminus \{0\}, \in)$, e quindi $(\mathbb{N}[X], \prec) \cong (\omega^\omega, \in)$; in particolare $\prec$ è un buon ordine su $\mathbb{N}[X]$. Per mostrarlo, osserviamo che

$$a_k X^k + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \ \prec\ b_h X^h + \ldots + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$$

dove $a_k, b_h \neq 0$ se e solo se $k < h$, oppure $k = h$ e $a_k < b_k$, oppure $h = k$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} < b_{k-1}$, oppure $\ldots$, oppure $k = h$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} = b_{k-1}$ e $\ldots$ e $a_1 = b_1$ e $a_0 < b_0$. Osserviamo poi che tra i corrispondenti ordinali vale

$$\omega^k a_k + \ldots + \omega^2 a_2 + \omega a_1 + a_0 \ <\ \omega^h b_h + \ldots + \omega^2 b_2 + \omega b_1 + b_0$$

dove $a_k, b_h \neq 0$ se e solo se $k < h$, oppure $k = h$ e $a_k < b_k$, oppure $h = k$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} < b_{k-1}$, oppure $\ldots$, oppure $k = h$ e $a_k = b_k$ e $a_{k-1} = b_{k-1}$ e $\ldots$ e $a_1 = b_1$ e $a_0 < b_0$. Questo garantisce che per tutti i polinomi $P, Q \in \mathbb{N}[X]$ si ha $P \prec Q \Leftrightarrow \varphi(P) < \varphi(Q)$. Notiamo infine che $\mathrm{Imm}(\varphi) = \omega^\omega \setminus \{0\}$. Infatti se $\alpha < \omega^\omega$ è un ordinale non nullo, allora usando la forma normale di Cantor possiamo scrivere $\alpha = \omega^k a_k + \ldots + \omega^2 a_2 + \omega a_1 + a_0$ e quindi $\alpha = \varphi(P)$ dove $P(X) = a_k X^k + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. L'ordinale $\alpha = 0$ non appartiene all'immagine perchè il polinomio nullo non appartiene a $\mathbb{N}[X]$.

**Esercizio 2.**

1. Scrivere la forma normale di Cantor degli ordinali $(\omega^3 + 1)^2$ e $(\omega^2 + 1)^\omega$.
2. Sia $\varphi : \omega^2 + \omega^2 \to \omega^2 + \omega^2$ una funzione strettamente crescente. Dimostrare che se $\beta < \omega^2$ allora $\varphi(\beta) < \omega^2$.
3. Determinare per quali ordinali infiniti $\alpha$ vale la proprietà di sopra se rimpiazziamo $\omega^2$ con $\alpha$.

**Soluzione.** (1). $(\omega^3 + 1)^2 = (\omega^3 + 1)(\omega^3 + 1) = (\omega^3 + 1)\omega^3 + (\omega^3 + 1) = \omega^6 + \omega^3 + 1$. Inoltre $(\omega^2 + 1)^\omega = \omega^\omega$; infatti $(\omega^2)^\omega \leq (\omega^2 + 1)^\omega \leq (\omega^3)^\omega$, e $(\omega^2)^\omega = \omega^{2\omega} = \omega^\omega$ e $(\omega^3)^\omega = \omega^{3\omega} = \omega^\omega$.

(2). Supponiamo per assurdo che esista $\beta < \omega^2$ tale che $\varphi(\beta) \geq \omega^2$. Visto che $\varphi$ è strettamente crescente, si dimostra facilmente per induzione transfinita che per ogni $\gamma$ tale che $\beta + \gamma < \omega^2 + \omega^2$ si ha $\varphi(\beta + \gamma) \geq \varphi(\beta) + \gamma$. Osserviamo che $\gamma := \omega^2$ è additivamente chiuso e quindi $\beta + \omega^2 = \omega^2 < \omega^2 + \omega^2$; avremmo allora che $\varphi(\omega^2) = \varphi(\beta + \omega^2) \geq \varphi(\beta) + \omega^2 \geq \omega^2 + \omega^2$, il che è assurdo.

(3). Sono tutti e soli gli ordinali $\alpha = \omega^\gamma n$ dove $\gamma \neq 0$ e $0 \neq n < \omega$.

Vediamo prima che gli ordinali $\alpha$ di quella forma soddisfano la proprietà richiesta. Per ogni $\beta < \omega^\gamma n$ esiste $m < n$ con $\omega^\gamma m \leq \beta < \omega^\gamma(m+1)$, e per la differenza a destra esiste $\rho < \omega^\gamma$ tale che $\beta = \omega^\gamma m + \rho$. Analogamente a sopra, osserviamo che per ogni $\delta$ tale che $\beta + \delta < \omega^\gamma n + \omega^\gamma n = \omega^\gamma(2n)$ si ha $\varphi(\beta + \delta) \geq \varphi(\beta) + \delta$. Se prendiamo $\delta := \omega^\gamma n$ allora

$$\beta + \delta = (\omega^\gamma m + \rho) + \omega^\gamma n = \omega^\gamma m + (\rho + \omega^\gamma n) = \omega^\gamma m + \omega^\gamma n = \omega^\gamma(m+n) < \omega^\gamma(2n).$$

Se fosse $\varphi(\beta) \geq \omega^\gamma n$, avremmo che $\varphi(\beta + \delta) \geq \varphi(\beta) + \delta \geq \omega^\gamma n + \omega^\gamma n = \omega^\gamma(2n)$, il che è assurdo.

Ad esempio usando la forma normale di Cantor, si osserva che che ogni ordinale infinito $\alpha$ si scrive in modo unico nella forma $\alpha = \omega^\gamma n + \vartheta$ per un opportuno $\gamma \neq 0$, un opportuno $0 \neq n \in \omega$, e un opportuno $\vartheta < \omega^\gamma$. Dobbiamo verificare che $\alpha$ non soddisfa la proprietà considerata quando $\vartheta \neq 0$. Notiamo che $\alpha + \alpha = (\omega^\gamma n + \vartheta) + (\omega^\gamma n + \vartheta) = \omega^\gamma n + (\vartheta + \omega^\gamma n) + \vartheta = \omega^\gamma(2n) + \vartheta$. Definiamo la funzione $f : \alpha + \alpha \to \alpha + \alpha$ come segue:

- $f(\xi) = \xi$ per $\xi < \omega^\gamma n$.
- $f(\omega^\gamma n + \delta) = \alpha + \delta$ per ogni $\delta < \alpha$.

Notiamo che $f$ è ben definita perché $\{\omega^\gamma n + \delta \mid \delta < \alpha\} = \{\xi \mid \omega^\gamma n \leq \xi < \alpha + \alpha\}$, quindi $\mathrm{dom}(f) = \alpha + \alpha$; inoltre anche $\{\alpha + \delta \mid \delta < \alpha\} = \{\xi \mid \alpha \leq \xi < \alpha + \alpha\}$, e quindi $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \alpha + \alpha$. Infine osserviamo che $f$ è strettamente crescente e che $\delta := \omega^\gamma n < \alpha$ è tale che $f(\delta) = \alpha$; quindi la funzione $f$ fornisce un controesempio alla proprietà considerata.

**Esercizio 3.** Stabilire quali assiomi di ZFC sono soddisfatti in ciascuno dei seguenti sei modelli naturali:

$$M_1 = (3, \in); \quad M_2 = (V_3, \in); \quad M_3 = (\omega, \in); \quad M_4 = (V_\omega, \in); \quad M_5 = (\omega + \omega, \in); \quad M_6 = (V_{\omega+\omega}, \in).$$

**Soluzione.** 1. L'assioma di *estensionalità* vale in tutti e sei i modelli perché gli universi sono insiemi transitivi.

2. L'assioma dell'*insieme vuoto* vale in tutti e sei i modelli perché gli universi contengono l'insieme vuoto.

3. L'assioma della *coppia* non vale in $M_1$, $M_3$ ed $M_5$ perché gli universi sono ordinali, e se prendiamo $\alpha \in M_i$ allora la coppia $\{\alpha, \alpha\} = \{\alpha\} \notin M_i$ perché non è un ordinale. Abbiamo visto a lezione che $(V_\alpha, \in)$ soddisfa l'assioma della *coppia* se e solo se $\alpha$ è limite; quindi $M_2$ non lo soddisfa, mentre $M_4$ e $M_6$ lo soddisfano.

4. L'assioma dell'*unione* vale in tutti e sei i modelli. Infatti ricordiamo che $\bigcup \lambda = \lambda$ se $\lambda$ è un ordinale limite, e $\bigcup(\beta + 1) = \beta$ se $\beta + 1$ è un ordinale successore. Quindi se $\alpha$ è un ordinale, il modello $(\alpha, \in)$ soddisfa l'assioma dell'*unione*; in particolare $M_1, M_3, M_5$ lo soddisfano. Inoltre, abbiamo visto a lezione che tutti i livelli $V_\alpha$ soddisfano l'assioma dell'*unione*; in particolare $M_2, M_4, M_6$ lo soddisfano.

5. $M_1$, $M_3$ e $M_5$ non soddisfano l'assioma di *separazione*; infatti $2 \in M_i$ ma il sottoinsieme ottenuto per separazione $\{1\} = \{x \in 2 \mid x = 1\} \notin M_i$ per ogni $i = 1, 3, 5$. Inoltre, abbiamo visto a lezione che tutti i livelli $V_\alpha$ soddisfano l'assioma di *separazione*; in particolare $M_2, M_4, M_6$ lo soddisfano.

6. L'assioma dell'insieme *potenza* non vale in $M_1$ ma vale in $M_3$ ed $M_5$. Osserviamo infatti che se $\alpha$ è un ordinale, la collezione dei suoi sottoinsiemi che sono ordinali coincide con $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$. Questo implica che se $M$ è un modello naturale il cui universo è un ordinale $\alpha$, allora $M$ soddisfa l'assioma delle parti se e solo $\alpha$ è limite. Inoltre, abbiamo visto a lezione che il livello $V_\alpha$ soddisfa l'assioma delle *parti* se e solo se $\alpha$ è limite; in particolare $M_2$ non lo soddisfa, menter $M_4$ e $M_6$ lo soddisfano.

7. L'assioma di *scelta* vale in tutti e sei i modelli. Infatti $M_1, M_3, M_5$ soddisfano banalmente l'assioma di *scelta* perché in quegli universi non esistono famiglie di insiemi non vuoti (ogni ordinale $\alpha \neq 0$ contiene l'insieme vuoto). Inoltre, abbiamo visto a lezione che tutti i livelli $V_\alpha$ soddisfano l'assioma di *scelta*.

8. L'assioma dell'*infinito* non vale in $M_1, M_2, M_3, M_4$ perché sono universi cui appartengono soltanto insiemi finiti. Invece $M_5$ ed $M_6$ soddisfano l'assioma dell'infinito perché contengono $\omega$.

9. L'assioma di *rimpiazzamento* non vale nei modelli $M_1$, $M_3$ e $M_5$. Osserviamo infatti che se $\alpha > 1$ è un ordinale, e consideriamo la funzione $F : 1 \to \alpha$ dove $F(0) = 1$, allora $\mathrm{Imm}(F) = \{1\}$ non è un ordinale e quindi non appartiene ad $\alpha$. Questo implica che se $M$ è un modello naturale il cui universo è un ordinale $\alpha > 1$, allora $M$ non soddisfa l'assioma di *rimpiazzamento*. Abbiamo visto a lezione che i livelli $V_\alpha$ dove $\alpha$ è successore non soddisfano l'assioma di *rimpiazzamento*; in particolare $M_2$ non lo soddisfa. Inoltre abbiamo visto a lezione che in $M_4 = (V_\omega, \in)$ vale l'assioma di *rimpiazzamento* mentre in $M_6 = (V_{\omega+\omega}, \in)$ non vale.

10. L'assioma di fondazione vale banalmente in tutti e sei i modelli, perché non ci sono catene $\in$-discendenti.

**Esercizio 4.** Per ogni insieme $X$ denotiamo con $[X]_< := \{A \subseteq X \mid |A| < |X|\}$. Dimostrare le seguenti proprietà:

1. Se $X$ è un insieme ordinato infinito, allora $|\{f : X \to X \mid f \text{ limitata}\}| = |\mathcal{P}(X)|$.
2. Se $X$ è infinito allora $|[X]_<| = \sup\{|X|^\mu \mid \mu < |X| \text{ cardinale}\}$.
3. Se $X$ ha una cardinalità fortemente inaccessibile, allora $|[X]_<| = |X|$.
4. Se $X$ è infinito allora $|[\mathbb{H}(X)]_<| = |\mathcal{P}(X)|$, dove $\mathbb{H}(X) := \{\alpha \in \mathbf{ORD} \mid |\alpha| \le |X|\}$ è il numero di Hartogs di $X$.

**Soluzione.** (1). Prendiamo due elementi $x \neq y$ in $X$ tali che esista $z \in X$ con $x, y < z$. Allora

$$|\{f : X \to X \mid f \text{ limitata}\}| \le |\{f : X \to \{x, y\}\}| = 2^{|X|} = |\mathcal{P}(X)|.$$

Per l'altra disuguaglianza basta notare che se $\kappa := |X|$ allora

$$|\{f : X \to X \mid f \text{ limitata}\}| \ge |\mathrm{Fun}(X, X)| = |\mathrm{Fun}(\kappa, \kappa)| = \kappa^\kappa = 2^\kappa = |\mathcal{P}(X)|.$$

(2). Sia $\kappa := |X|$. Osserviamo che se $I := \{\mu \text{ cardinale} \mid \mu < \kappa\}$, allora $[\kappa]_< = \bigcup_{\mu \in I} [\kappa]^\mu$ è un'unione disgiunta, dove $[\kappa]^\mu := \{A \subseteq \kappa \mid |A| = \mu\}$. Banalmente $|I| \le \kappa$; inoltre abbiamo visto a lezione che $|[\kappa]^\mu| = \kappa^\mu$. Abbiamo allora:

$$|[X]_<| = |[\kappa]_<| = |\bigcup_{\mu \in I} [\kappa]^\mu| = \sum_{\mu \in I} \kappa^\mu = \max\left\{\sup_{\mu \in I} \kappa^\mu, |I|\right\} = \sup_{\mu \in I} \kappa^\mu = \sup\{|X|^\mu \mid \mu < |X| \text{ cardinale}\}.$$

(3). Sia $\kappa = |X|$. Visto che banalmente $\{\{\alpha\} \mid \alpha \in \kappa\} \subset [X]_<$, segue subito che $\kappa \le |[X]_<|$. Per l'altra disuguaglianza osserviamo che, per il punto (2), si ha $|[X]_<| = \sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \kappa \text{ cardinale}\}$. Per concludere, basta vedere che $\kappa^\mu = \kappa$ per ogni $\mu < \kappa$. Visto che $\kappa$ è regolare, ogni funzione $f : \mu \to \kappa$ è limitata e dunque esiste un ordinale $\gamma < \kappa$ tale che $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \gamma$. Allora:

$$\kappa^\mu = |\mathrm{Fun}(\mu, \kappa)| = \left|\bigcup_{\gamma < \kappa} \mathrm{Fun}(\mu, \gamma)\right| \le \sum_{\gamma < \kappa} |\gamma|^\mu = \max\left\{\sup_{\gamma < \kappa} |\gamma|^\mu, \kappa\right\}.$$

Visto che $\kappa$ è un limite forte, $|\gamma|, \mu < \kappa \Rightarrow |\gamma|^\mu < \kappa$ e quindi $\max\left\{\sup_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\mu, \kappa\right\} = \kappa$.

(4). Sia $\kappa = |X|$. Allora $|\mathcal{P}(X)| = 2^\kappa$; inoltre $\mathbb{H}(X) = \kappa^+$ è il successore di $\kappa$, e quindi

$$[\mathbb{H}(X)]_< = [\kappa^+]_< = \{A \subseteq \kappa^+ \mid |A| \le \kappa\}.$$

Banalmente $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq [\mathbb{H}(X)]_<$ e quindi $2^\kappa \leq |[\mathbb{H}(X)_<|$. Per l'altra disuguaglianza, osserviamo che $|\mathbb{H}(X)]_< = \bigcup_{\mu\leq\kappa}[\kappa^+]^\mu$ dove $[\kappa^+]^\mu = \{A \subseteq \kappa^+ \mid |A| = \mu\}$. Abbiamo visto a lezione che $|[\kappa^+]^\mu| = (\kappa^+)^\mu =$ (per Hausdorff) $= \kappa^\mu \cdot \kappa^+$. Allora

$$|[\mathbb{H}(X)]_<| \leq \sum_{\mu\leq\kappa} \kappa^\mu \cdot \kappa^+ \leq \max\left\{\sup_{\mu\leq\kappa}(\kappa^\mu \cdot \kappa^+), \kappa\right\} = \kappa^\kappa \cdot \kappa^+ = 2^\kappa \cdot \kappa^+ = 2^\kappa.$$

**Esercizio 5.** Dimostrare che per tutti gli ordinali $\alpha, \beta, \gamma$ dove $|\gamma| \leq \aleph_\beta$, vale la seguente uguaglianza:

$$(\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|}.$$

**Soluzione.** Osserviamo intanto che se $\gamma = n \in \omega$ è finito, allora la tesi segue dal teorema di Hausdorff; infatti

$$(\aleph_{\alpha+n})^{\aleph_\beta} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+n})^n.$$

Procediamo per induzione transfinita su $\gamma$. Sia $\gamma = \delta + 1$ un successore. Visto che possiamo assumere $\gamma$ infinito, abbiamo che $|\gamma| = |\delta|$, e usando due volte il Teorema di Hausdorff, si ottiene:

$$\begin{aligned}(\aleph_{\alpha+\delta+1})^{\aleph_\beta} = (\aleph_{\alpha+\delta})^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} = \text{ (ip. ind.) } &= (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta})^{|\delta|} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} = \\ &= (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta+1})^{|\delta|} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta+1})^{|\delta+1|}.\end{aligned}$$

Consideriamo infine il caso in cui $\gamma$ è limite. Abbiamo:

$$\begin{aligned}(\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta} = \left((\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|}\right)^{\aleph_\beta} = \left(\prod_{\delta<\gamma} \aleph_{\alpha+\delta}\right)^{\aleph_\beta} = \prod_{\delta<\gamma}(\aleph_{\alpha+\delta})^{\aleph_\beta} = \text{ (ip. ind.) } = \prod_{\delta<\gamma}\left((\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\delta})^{|\delta|}\right) \leq \\ \leq \prod_{\delta<\gamma}\left((\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|}\right) = \left((\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|}\right)^{|\gamma|} = (\aleph_\alpha)^{\aleph_\beta} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma})^{|\gamma|} \leq (\aleph_{\alpha+\gamma})^{\aleph_\beta}.\end{aligned}$$