Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 15 Gennaio 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti per ogni insieme $A \neq \emptyset$:

1. A è bene ordinabile.
2. Esiste un ordinale α ed una funzione iniettiva $f : A \to \alpha$;
3. Esiste un'ordinale β ed una funzione suriettiva $g : \beta \to A$.

Soluzione. (1) $\Rightarrow$ (2) e (1) $\Rightarrow$ (3). Sia $<_A$ un buon ordinamento su A. Abbiamo visto a lezione che ogni buon ordine è isomorfo ad un ordinale; quindi esiste un ordinale β ed un isomorfismo $\varphi : \beta \to (A, <)$. In particolare, φ è sia la funzione iniettiva che la funzione suriettiva cercata.

(3) $\Rightarrow$ (1). Per ogni $a \in A$ definiamo $\gamma_a := \min\{\gamma \in \beta \mid g(\gamma) = a\}$, e poniamo $a < a' \Leftrightarrow \gamma_a < \gamma_{a'}$. L'insieme $\Gamma = \{\gamma_a \mid a \in A\}$ è bene ordinato in quanto sottoinsieme dell'ordinale β; inoltre è facile verificare che la funzione $h : a \mapsto \gamma_a$ è un isomorfismo di ordini tra $(A, <)$ e $(\Gamma, <)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se poniamo $a < a' \Leftrightarrow f(a) < f(a')$, è immediato verificare che f è un isomorfismo di ordine tra $(A, <)$ e $\Gamma = \mathrm{Im}(f)$ con l'ordinamento indotto da α. Infine basta osservare che Γ è bene ordinato in quanto sottoinsieme di un ordinale.

Esercizio 2.

1. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra $\omega^{\omega+2} + \omega^5 + \omega^2 + 3$ e $\omega^3 + 11$.
2. Per ogni $n \in \omega$, scrivere in forma normale di Cantor il seguente ordinale: $(\omega^2 7 + 5)^n$.
3. Sia $g : \omega_1 + \omega_1 \to \omega_1 + \omega_1$ una funzione strettamente crescente e continua ai limiti, cioè tale che $g(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} g(\gamma)$ per ogni ordinale limite $\lambda < \omega_1 + \omega_1$. Dimostrare che se $\alpha \in \omega_1$ allora $g(\alpha) \in \omega_1$.

Soluzione. (1). Osserviamo che $(\omega^3 + 11)\omega = \omega^4$; infatti $\omega^4 = \omega^3\omega \leq (\omega^3 + 11)\omega \leq (\omega^3 + \omega^3)\omega = (\omega^3 2)\omega = \omega^3(2\omega) = \omega^3\omega = \omega^4$. Si ha: $(\omega^3 + 11)\omega^{\omega+2} = (\omega^3 + 11)\omega^{1+\omega+2} = (\omega^3 + 11)\omega \cdot \omega^{\omega+2} = \omega^4\omega^{\omega+2} = \omega^{4+\omega+2} = \omega^{\omega+2}$; inoltre $(\omega^3 + 11)\omega^2 = (\omega^3 + 11)\omega \cdot \omega = \omega^4\omega = \omega^5$. Quindi, per la proprietà distributiva a destra, abbiamo:

$$(\omega^3 + 11)(\omega^{\omega+2} + \omega^2) = (\omega^3 + 11)\omega^{\omega+2} + (\omega^3 + 11)\omega^2 = \omega^{\omega+2} + \omega^5.$$

Concludiamo che il quoziente cercato è $\omega^{\omega+2} + \omega^2$, ed il resto è $\omega^2 + 3 < \omega^3 + 11$.

(2). Dimostriamo che per ogni $0 \neq n \in \omega$ vale l'uguaglianza

$$(\omega^2 7 + 5)^n = \omega^{2n}7 + \omega^{2n-2}35 + \ldots + \omega^2 35 + 5 = \omega^{2n}7 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{2n-2i}35 + 5,$$

dove conveniamo che $\sum_{i=1}^{n-1} \omega^{2n-2i}35 = 0$ quando $n = 1$. Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ la tesi è banale. Per il caso successore, osserviamo prima che $(\omega^{2n}7 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{2n-2i}35 + 5)\omega^2 7 = \omega^{2n+2}7$; infatti:

$$\omega^{2n+2}7 = \omega^{2n}\omega^2 7 \leq \left(\omega^{2n}7 + \sum_{i=1}^{n-1} \omega^{2n-2i}35 + 5\right)\omega^2 7 \leq (\omega^{2n}8)\omega^2 7 = \omega^{2n}(8\omega^2)7 = \omega^{2n}\omega^2 7 = \omega^{2n+2}7.$$

Inoltre, visto che le potenze di ω assorbono le somme a sinistra con ordinali più piccoli,

$$(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5)+\omega^{2n}7 = \omega^{2n}7+(\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5+\omega^{2n})+\omega^{2n}6 = \omega^{2n}7+\omega^{2n}+\omega^{2n}6 = \omega^{2n}14.$$

Segue allora che

$$\begin{aligned}
&\left(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5\right)\cdot 5 = \\
&= \left(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5\right)+\left(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5\right)+\ldots+\left(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5\right) = \\
&= \omega^{2n}7+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5+\omega^{2n}7\right)+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5+\omega^{2n}7\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5 = \\
&= \omega^{2n}7+\omega^{2n}7+\ldots+\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5 = \omega^{2n}35+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5.
\end{aligned}$$

Usando le uguaglianze viste sopra, possiamo infine concludere che valgono anche le seguenti uguaglianze, che dimostrano il passo induttivo:

$$\begin{aligned}
&(\omega^2 7+5)^{n+1} = (\omega^2 7+5)^n(\omega^2 7+5) = (\omega^2 7+5)^n\cdot\omega^2 7+(\omega^2 7+5)^n\cdot 5 = \text{ (ip. ind.)} \\
&\left(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5\right)\cdot\omega^2 7+\left(\omega^{2n}7+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5\right)\cdot 5 = \omega^{2n+2}7+\omega^{2n}35+\sum_{i=1}^{n-1}\omega^{2n-2i}35+5.
\end{aligned}$$

(3). Supponiamo per assurdo che esista $\alpha < \omega_1$ tale che $g(\alpha) \geq \omega_1$. Visto che g è crescente, si dimostra per induzione transfinita che $g(\alpha+\gamma) \geq \omega_1+\gamma$ per ogni $\gamma < \omega_1$. Notiamo che $\alpha+\omega_1 = \omega_1$ e quindi, per la continuità ai limiti, si dovrebbe avere che

$$g(\omega_1) = g(\alpha+\omega_1) = \sup_{\gamma<\omega_1} g(\alpha+\gamma) \geq \sup_{\gamma<\omega_1}(\omega_1+\gamma) = \omega_1+\omega_1,$$

il che è assurdo.

Esercizio 3.

1. Determinare, se esistono, tutti gli ordinali $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ tali che:
   (a) $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \{0,1\}) \in V_{\alpha+1}$.
   (b) $\mathrm{Fun}(V_\beta, \{0,1\}) \subseteq V_{\beta+1}$.
   (c) $\mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\gamma) \in V_\gamma$.
   (d) $\mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\delta) \subseteq V_\delta$.
2. Sia κ un cardinale infinito. Determinare per quali ordinali α si ha che

$$[V_\alpha]^{<\kappa} := \{A \subseteq V_\alpha \mid |A| < \kappa\} \subseteq V_\alpha.$$

Soluzione. (1a). Nessun ordinale α soddisfa la proprietà richiesta. Infatti se fosse $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \{0,1\}) \in V_{\alpha+1}$, cioè se $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \{0,1\}) \subseteq V_\alpha$, allora ogni funzione $f : V_\alpha \to \{0,1\}$ apparterrebbe a V_α. Ma nessuna di quelle funzioni appartiene a V_α, altrimenti ci apparterrebbe anche il suo dominio, ed avremmo che $\mathrm{dom}(f) = V_\alpha \in V_\alpha$, il che è assurdo.

(1b). Cerchiamo quegli ordinali β con la proprietà che ogni funzione $f : V_\beta \to \{0,1\}$ appartiene a $V_{\beta+1}$, cioè $f \subseteq V_\beta$. Quella proprietà vale se e solo se β è limite. Infatti se β è limite, allora per ogni $a \in V_\beta$ le coppie ordinate $(a,0),(a,1) \in V_\beta$, e quindi il prodotto cartesiano $V_\beta \times \{0,1\} \subseteq V_\beta$. Infine, osserviamo che se $f : V_\beta \to \{0,1\}$ allora $f \subseteq V_\beta \times \{0,1\}$, quindi $f \subseteq V_\beta$.

Se invece $\beta = \xi + 1$ è un successore, allora avremmo che $V_\xi \in \mathrm{dom}(f)$, e quindi la coppia ordinata $(V_\xi, i) \in f$ dove $i = f(V_\xi)$. Questo non è possibile perché allora $(V_\xi, i) \in V_\beta$, cioè $(V_\xi, i) \subseteq V_\xi$, ed avremmo che $V_\xi \in \{V_\xi\} \in \{\{V_\xi\}, \{V_\xi, i\}\} = (V_\xi, i) \subseteq V_\xi$, quindi $V_\xi \in \{V_\xi\} \in V_\xi$, e infine $V_\xi \in V_\xi$ per transitività, e questo è assurdo.

(1c). Nessun ordinale γ soddisfa la proprietà richiesta.

Osserviamo che le funzioni $f : \{0,1\} \to V_\gamma$ sono tutti e soli gli insiemi del tipo $f = \{(0,a),(1,b)\}$ dove $a, b \in V_\gamma$. Se γ è limite, e per assurdo fosse $\mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\gamma) \in V_\gamma$, allora esisterebbe $\eta < \gamma$ con $\mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\gamma) \in V_\eta$. Ma allora, prendendo $f : \{0,1\} \to V_\gamma$ tale che $f(0) = \eta$, avremmo $\eta \in \{0,\eta\} \in (0,\eta) \in f \in \mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\gamma) \in V_\eta$ e quindi, per transitività, $\eta \in V_\eta$, il che è assurdo.

Se $\delta = \xi + 1$ è successore, prendiamo ad esempio una funzione $f : \{0,1\} \to V_{\xi+1}$ dove $f(0) = \xi$. Allora $f \notin V_{\xi+1}$, altrimenti avremmo $\xi \in \{0,\xi\} \in (0,\xi) \in f \subseteq V_\xi$, quindi $\xi \in \{0,\xi\} \in (0,\xi) \in V_\xi$, e infine $\xi \in V_\xi$ per transitività, il che è assurdo.

(1d). Cerchiamo quegli ordinali δ con la proprietà che ogni funzione $f : \{0,1\} \to V_\delta$ appartiene a V_δ. Quella proprietà vale se e solo se δ è limite.

Come già osservato sopra, ogni funzione $f : \{0,1\} \to V_\delta$ è un insieme del tipo $f = \{(0,a),(1,b)\}$ dove $a, b \in V_\delta$. Se δ è limite, allora $0, a, 1, b \in V_\delta \Rightarrow (0,a),(1,b) \in V_\delta \Rightarrow f \in V_\delta$. Se invece $\delta = \xi + 1$ è successore, allora la proprietà richiesta non vale. Ad esempio, se $f : \{0,1\} \to V_{\xi+1}$ è una funzione dove $f(0) = \xi$, allora $f \notin V_{\xi+1}$, altrimenti avremmo $\xi \in \{0,\xi\} \in (0,\xi) \in f \subseteq V_\xi$, quindi $\xi \in \{0,\xi\} \in (0,\xi) \in V_\xi$, e infine $\xi \in V_\xi$ per transitività, il che è assurdo.

(2). Gli ordinali α che soddisfano la proprietà richiesta sono tutti e soli quelli con $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \kappa$. Infatti supponiamo che prima che $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \kappa$. Notiamo che α è necessariamente un ordinale limite. Sia $A \subseteq V_\alpha$ un qualunque insieme di cardinalità $|A| < \kappa$. Per ogni $a \in A$, prendiamo $\beta_a < \alpha$ con $a \in V_{\beta_a}$. L'insieme $\Gamma := \{\beta_a \mid a \in A\} \subseteq \alpha$ è un insieme di cardinalità $|\Gamma| \leq |A| < \kappa \leq \mathrm{cof}(\alpha)$, e quindi è limitato in α. Prendiamo $\beta \in \alpha$ maggiorante di Γ. Allora per ogni $a \in A$ si ha che $a \in V_{\beta_a} \subseteq V_\beta$, quindi $A \subseteq V_\beta$, e concludiamo che $A \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$, come voluto.

Per l'altra implicazione, supponiamo che $\mathrm{cof}(\alpha) < \kappa$. Allora esiste un sottoinsieme $\Gamma \subseteq \alpha$ illimitato di cardinalità $|\Gamma| = \mathrm{cof}(\alpha) < \kappa$. Visto che $\Gamma \subseteq \alpha \subseteq V_\alpha$, si ha che $\Gamma \in [V_\alpha]^{<\kappa}$. Tuttavia $\Gamma \notin V_\alpha$, altrimenti avremmo che $\alpha = \bigcup \Gamma \in V_\alpha$, il che è assurdo. (L'uguaglianza $\alpha = \bigcup \Gamma$ vale perché Γ è illimitato, e $\bigcup \Gamma = \sup \Gamma$.)

Esercizio 4. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

1. $\prod_{\alpha<\omega+\omega} \aleph_\alpha = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$.
2. $\prod_{\alpha<\omega^2} \aleph_\alpha = (\aleph_{\omega^2})^{\aleph_0}$.
3. $\prod_{\alpha<\omega^\omega} \aleph_\alpha = (\aleph_{\omega^\omega})^{\aleph_0}$.

Soluzione. (1). Usando la proprietà associativa generalizzata e la formula per i prodotti infiniti, si ottiene:

$$\prod_{\alpha<\omega+\omega} \aleph_\alpha = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_n\right) \cdot \left(\prod_{k<\omega} \aleph_{\omega+k}\right) = \left(\sup_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_0} \cdot \left(\sup_{k<\omega} \aleph_{\omega+k}\right)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\aleph_0} \cdot (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}.$$

(2). Usando la proprietà associativa generalizzata e la formula per i prodotti infiniti, si ottiene:

$$\prod_{\alpha<\omega^2} \aleph_\alpha = \prod_{n<\omega} \left(\prod_{\omega n \leq \alpha < \omega(n+1)} \aleph_\alpha \right) = \prod_{n<\omega} \left(\prod_{k<\omega} \aleph_{\omega n+k} \right) = \prod_{n<\omega} \left(\sup_{k<\omega} \aleph_{\omega n+k} \right)^{\aleph_0} =$$

$$\prod_{n<\omega} (\aleph_{\omega(n+1)})^{\aleph_0} = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_{\omega(n+1)} \right)^{\aleph_0} = \left(\left(\sup_{n<\omega} \aleph_{\omega(n+1)} \right)^{\aleph_0} \right)^{\aleph_0} = \left((\aleph_{\omega^2})^{\aleph_0} \right)^{\aleph_0} = (\aleph_{\omega^2})^{\aleph_0}.$$

(3). Notiamo che

$$\prod_{\alpha<\omega^\omega} \aleph_\alpha \leq \prod_{\alpha<\omega^\omega} \aleph_{\omega^\omega} = (\aleph_{\omega^\omega})^{|\omega^\omega|} = (\aleph_{\omega^\omega})^{\aleph_0}.$$

Inoltre:

$$\prod_{\alpha<\omega^\omega} \aleph_\alpha \geq \prod_{n<\omega} \aleph_{\omega^n} = \left(\sup_{n<\omega} \aleph_{\omega^n} \right)^{\aleph_0} = (\aleph_{\omega^\omega})^{\aleph_0}.$$