Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 15 Gennaio 2025

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti per ogni insieme $A \neq \emptyset$:

1. A è bene ordinabile.
2. Esiste un ordinale α ed una funzione iniettiva $f : A \to \alpha$;
3. Esiste un'ordinale β ed una funzione suriettiva $g : \beta \to A$.

Esercizio 2.

1. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra $\omega^{\omega+2} + \omega^5 + \omega^2 + 3$ e $\omega^3 + 11$.
2. Per ogni $n \in \omega$, scrivere in forma normale di Cantor il seguente ordinale: $(\omega^2 7 + 5)^n$.
3. Sia $g : \omega_1 + \omega_1 \to \omega_1 + \omega_1$ una funzione strettamente crescente e continua ai limiti, cioè tale che $g(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} g(\gamma)$ per ogni ordinale limite $\lambda < \omega_1 + \omega_1$. Dimostrare che se $\alpha \in \omega_1$ allora $g(\alpha) \in \omega_1$.

Esercizio 3.

1. Determinare, se esistono, tutti gli ordinali $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ tali che:
   (a) $\mathrm{Fun}(V_\alpha, \{0,1\}) \in V_{\alpha+1}$.
   (b) $\mathrm{Fun}(V_\beta, \{0,1\}) \subseteq V_{\beta+1}$.
   (c) $\mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\gamma) \in V_\gamma$.
   (d) $\mathrm{Fun}(\{0,1\}, V_\delta) \subseteq V_\delta$.
2. Sia κ un cardinale infinito. Determinare per quali ordinali α si ha che

$$[V_\alpha]^{<\kappa} := \{A \subseteq V_\alpha \mid |A| < \kappa\} \subseteq V_\alpha.$$

Esercizio 4. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

1. $\prod_{\alpha<\omega+\omega} \aleph_\alpha = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$.
2. $\prod_{\alpha<\omega^2} \aleph_\alpha = (\aleph_{\omega^2})^{\aleph_0}$.
3. $\prod_{\alpha<\omega^\omega} \aleph_\alpha = (\aleph_{\omega^\omega})^{\aleph_0}$.