

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Sia α un ordinale. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) $2^\alpha = \omega^\alpha$; (b) $\alpha = \omega \cdot \alpha$; (c) α è multiplo di ω^ω , cioè $\alpha = \omega^\omega \cdot \beta$ per qualche $\beta \geq 1$.

2. Si consideri la funzione *fattoriale* per ordinali definita ponendo $0! = 1$; $(\beta + 1)! = \beta!(\beta + 1)$; e $\lambda! = (\bigcup_{\gamma < \lambda} \gamma!)\lambda$ se λ è limite.

(a) Dimostrare che $\alpha! = \alpha$ se e solo se $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$.

(b) Determinare la forma normale di Cantor di $(\omega + n)!$ per ogni $n < \omega$.

(c) * Determinare la forma normale di Cantor di $\omega^2!$.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che le seguenti due proprietà sono equivalenti:

(a) Vale l'ipotesi generalizzata del continuo (GCH), cioè $2^\kappa = \kappa^+$ per ogni cardinale infinito κ .

(b) Se κ è un cardinale infinito regolare allora $\sup_{\nu < \kappa} \kappa^\nu = \kappa$.

2. Sia \mathcal{G} è una famiglia di insiemi, sia $\langle \mathcal{G} \rangle$ la σ -algebra generata, e sia κ un cardinale infinito.

(a) Dimostrare che se $|\mathcal{G}| \leq \kappa$ allora $|\langle \mathcal{G} \rangle| \leq \kappa^{\aleph_0}$.

(b) Trovare un esempio di famiglia infinita *non numerabile* di insiemi \mathcal{G} tale che $|\langle \mathcal{G} \rangle| > |\mathcal{G}|$.

N.B. Si può usare il seguente fatto visto a lezione. Se \mathcal{G} è una famiglia di insiemi, allora la σ -algebra generata è uguale a $\langle \mathcal{G} \rangle = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{G}_\alpha$, dove si definisce per ricorsione:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \\ \mathcal{G}_{\alpha+1} = \mathcal{G}_\alpha \cup \{G^c \mid G \in \mathcal{G}_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \mid G_n \in \mathcal{G}_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \mid G_n \in \mathcal{G}_\alpha\} \\ \mathcal{G}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{G}_\alpha \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$