Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 7 Febbraio 2019

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Supponiamo che $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $X_i = \{A \subset \mathbb{R} \mid |A| = \aleph_i\}$ per $i = 0, 1, 2$.
2. $Y = \{A \subset \mathbb{R} \mid (A, <)$ ha tipo d'ordine $\omega^2\}$.
3. Il quoziente $Z/\equiv$ dell'insieme $Z = \{A \subset \mathbb{R} \mid (A, <)$ è bene ordinato$\}$ modulo la relazione di equivalenza $A \equiv B \Leftrightarrow (A, <) \cong (B, <)$.
4. $W = \{R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid R$ è una relazione di buon ordine su $\mathbb{R}\}$.

Soluzione. (1). Notiamo che $X_i = [\mathbb{R}]^{\aleph_i}$ è la famiglia delle parti di $\mathbb{R}$ di cardinalità $\aleph_i$. Dunque, usando una formula vista a lezione, abbiamo che $|X_i| = |[2^{\aleph_0}]^{\aleph_i}| = (\aleph_2)^{\aleph_i} =$ (usando la formula di Hausdorff per l'esponenziale di cardinali successori) $= {\aleph_0}^{\aleph_i} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_i} \cdot \aleph_2$. Dunque $|X_0| = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_2 = \aleph_2$; $|X_1| = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_1}$; e $|X_2| = 2^{\aleph_2} \cdot \aleph_2 = 2^{\aleph_2}$.

(2). Visto che $Y \subseteq [\mathbb{R}]^{\aleph_0}$, si ha la disuguaglianza $|Y| \leq |[\mathbb{R}]^{\aleph_0}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Viceversa, prendiamo un insieme $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ che sia isomorfo ad ω^2, ad esempio $\Gamma = \{n - \frac{1}{k+1} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$. La funzione $\psi : \mathbb{R} \to Y$ dove $r \mapsto r + \Gamma = \{r + n - \frac{1}{k+1} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ è iniettiva, e quindi vale anche la disuguaglianza inversa $\aleph_2 = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \leq |Y|$.

(3). Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è bene ordinato, allora $|A| \leq \aleph_0$. Infatti possiamo definire una funzione iniettiva $\psi_A : A \to \mathbb{Q}$ in questo modo: per ogni $a \in A$, sia $\psi_A(a)$ un numero razionale appartenente all'intervallo $[a, a^+)$, dove con a^+ abbiamo indicato l'elemento successore di a (ricordiamo che in un insieme bene ordinato, ogni elemento ha un successore). Quindi il quoziente $Z/\equiv$ contiene al più tutti i tipi di buon ordine che hanno cardinalità al più numerabile. Ricordando che ogni buon ordine è isomorfo ad uno ed un solo ordinale, si ha allora la disuguaglianza $|Z/\equiv| \leq |\omega_1| = \aleph_1$. Viceversa, sappiamo da un Teorema di Cantor che per ogni ordine totale al piu' numerabile esiste un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ (e quindi di $\mathbb{R}$) ad esso isomorfo; in particolare, per ogni $\alpha < \omega_1$ esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ad esso isomorfo, e quindi abbiamo anche la disuguaglianza inversa $\aleph_1 = |\omega_1| \leq |Z/\equiv|$.

(4). Grazie all'assioma di scelta, sappiamo che $\mathbb{R}$ è bene ordinabile, cioè esiste una relazione di buon ordine $\prec$ su $\mathbb{R}$ (naturalmente una tale relazione non ha niente a che fare con la usuale relazione d'ordine su $\mathbb{R}$). Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$, considero l'ordinamento $\mathcal{R}_A$ su $\mathbb{R}$ dato da $(A, \prec) \oplus (\mathbb{R} \setminus A, \prec)$.[2] Notiamo che $\mathcal{R}_A$ è bene ordinato; infatti, un sottoinsieme di un insieme bene ordinato è bene ordinato, e la somma di due insiemi bene ordinati è bene ordinato. È facile verificare che $\mathcal{R}_A \neq \mathcal{R}_B$ quando $A \neq B$, quindi la corrispondenza $A \mapsto \mathcal{R}_A$ determina una funzione iniettiva $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to W$, ed abbiamo la

[1] Con $(A, <)$ si intende l'insieme ordinato avente come ordinamento quello indotto da $\mathbb{R}$.

[2] Ricordiamo che la somma $X \oplus Y$ di due insiemi ordinati $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ è l'insieme bene ordinato che si ottiene disponendo prima gli elementi di X con il loro ordinamento, seguito dagli elementi di Y con il loro ordinamento (stiamo supponiamo per semplicità che X e Y siano disgiunti). Precisamente, se $a, b \in X \cup Y$, poniamo $a < b$ se e solo se $a, b \in X$ e $a <_X b$, oppure $a, b \in Y$ e $a <_Y b$, oppure $a \in X$ e $b \in Y$.

disuguaglianza $2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |W|$. D'altra parte, $W \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, e quindi $|W| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$, e per Cantor-Bernstein possiamo concludere che $|W| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Per ogni $n, k \in \omega$ naturali non nulli, determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega \cdot n + k)^{\omega \cdot 3+1}$.

2. Determinare gli ordinali β tali che $\omega^\omega \cdot \beta = \beta + \omega^\omega$.

Soluzione. (1). Notiamo intanto che $(\omega n + k)^\omega = \omega^\omega$. Infatti, da $\omega \leq \omega n + k \leq \omega^2$ segue che $\omega^n \leq (\omega n+k)^n \leq (\omega^2)^n = \omega^{2n}$ per ogni $n \in \omega$, e quindi $\omega^\omega = \sup_n \omega^n \leq \sup_n (\omega n+k)^n = (\omega n+k)^\omega \leq \sup_n \omega^{2n} = \omega^\omega$. Abbiamo allora che $(\omega n + k)^{\omega \cdot 3} = ((\omega n + k)^\omega)^3 = (\omega^\omega)^3 = \omega^{\omega \cdot 3}$. Infine,

$$(\omega n + k)^{\omega \cdot 3+1} = (\omega n + k)^{\omega \cdot 3} \cdot (\omega n + k) = \omega^{\omega 3} \cdot (\omega n + k) = \omega^{\omega 3} \cdot \omega n + \omega^{\omega 3} \cdot k = \omega^{\omega 3+1} n + \omega^{\omega 3} k.$$

(2). Dimostriamo che β ha la proprietà richiesta se e solo se è congruo ad 1 modulo ω^{ω^2}, cioè se e solo $\beta = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma + 1$ per un opportuno γ.

Effettuando la divisione euclidea per ω^{ω^2}, scriviamo $\beta = \omega^{\omega^2}\gamma + \rho$ dove $\rho < \omega^{\omega^2}$. Allora $\beta + \omega^\omega = \omega^{\omega^2}\gamma + \rho + \omega^\omega$ e $\omega^\omega \cdot \beta = \omega^{\omega+\omega^2}\gamma + \omega^\omega\rho = \omega^{\omega^2}\gamma + \omega^\omega\rho$. Dall'ipotesi $\omega^\omega \cdot \beta = \beta + \omega^\omega$, cancellando a sinistra si ottiene che $\rho + \omega^\omega = \omega^\omega\rho$. Chiaramente se $\rho = 0$ quell'uguaglianza non vale, mentre se $\rho = 1$ quell'uguaglianza vale. Infine, se $1 < \rho < \omega^{\omega^2}$ quell'uguaglianza non vale. Infatti, in questo caso esiste $n \in \omega$ con $\omega^{\omega n} < \rho \leq \omega^{\omega(n+1)}$, e allora $\omega^\omega\rho > \omega^\omega \cdot \omega^{\omega n} = \omega^{\omega(n+1)} \geq \rho$.

(2)bis. Una soluzione alternativa (ma più lunga) si ottiene considerando la divisione euclidea per ω^ω. Scriviamo β nella forma $\beta = \omega^\omega \cdot \xi + \delta$ dove $\delta < \omega^\omega$. Allora $\beta + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot \xi + \delta + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot \xi + \omega^\omega = \omega^\omega(\xi + 1)$. Per ipotesi, quest'ultimo deve essere uguale a $\omega^\omega \cdot \beta$ e, cancellando a sinistra, si ottiene che $\xi + 1 = \beta = \omega^\omega \cdot \xi + \delta$. Chiaramente $\delta = \delta' + 1$ deve essere un successore, e inoltre da $\omega^\omega \cdot \xi + \delta' = \xi$ segue necessariamente che $\delta' = 0$, e dunque $\delta = 1$ (infatti se fosse $\delta' > 0$, avremmo che $\omega^\omega \cdot \xi + \delta' \geq \xi + 1 > \xi$). Perciò abbiamo che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$, e questo accade se e solo se $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma$ per qualche γ (vedi sotto). Finalmente otteniamo che $\beta = \omega^\omega \cdot \xi + \delta = \omega^\omega \cdot \omega^{\omega^2} \cdot \gamma + 1 = \omega^{\omega+\omega^2} \cdot \gamma + 1 = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma + 1$, come voluto.

Resta da verificare che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$ se e solo se $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma$ per qualche γ.[3] Usando la divisione euclidea scriviamo $\xi = \omega^{\omega^2}\gamma + \rho$ dove $\rho < \omega^{\omega^2}$. Abbiamo allora che $\omega^\omega \cdot \xi = \omega^\omega(\omega^{\omega^2}\gamma + \rho) = \omega^{\omega+\omega^2}\gamma + \omega^\omega\rho = \omega^{\omega^2}\gamma + \omega^\omega\rho$ è uguale a $\xi = \omega^{\omega^2}\gamma + \rho$ se e solo se $\omega^\omega\rho = \rho$ (abbiamo usato la proprietà della cancellazione a sinistra: $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Leftrightarrow \beta = \beta'$). Se $\rho = 0$, l'uguaglianza $\omega^\omega\rho = \rho$ è banalmente vera. Se invece $\rho \neq 0$ l'uguaglianza non vale; infatti in questo caso esiste $n \in \omega$ tale che $\omega^{\omega n} \leq \rho < \omega^{\omega(n+1)}$, ed abbiamo che $\omega^\omega \cdot \rho \geq \omega^\omega \cdot \omega^{\omega n} = \omega^{\omega(n+1)} > \rho$.

Un altro possibile modo per verificare che $\omega^\omega \cdot \xi = \xi$ se e solo se $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma$ per qualche γ è il seguente. Usiamo la forma normale di Cantor $\xi = \omega^{\beta_1} n_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} n_k$ dove $\beta_1 > \ldots > \beta_k$ e $1 \leq n_i < \omega$. Allora

$$\omega^\omega \xi = \omega^{\omega+\beta_1} n_1 + \ldots \omega^{\omega+\beta_k} n_k.$$

Quindi $\omega^\omega \xi = \xi$ se e solo se $\omega + \beta_i = \beta_i$ per ogni i, e questo succede se e solo se $\beta_i \geq \omega^2$ per ogni i. Usando la differenza tra ordinali, scriviamo allora $\beta_i = \omega^2 + \gamma_i$ per opportuni γ_i, e concludiamo che

$$\xi = \omega^{\omega^2+\gamma_1} n_1 + \ldots + \omega^{\omega^2+\gamma_k} n_k = \omega^{\omega^2} \cdot \gamma \quad \text{dove} \quad \gamma = \omega^{\gamma_1} n_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k} n_k.$$

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

[3] Questo era un esercizio assegnato nel compito del 5 Luglio 2018.

2. Siano $\nu \leq \kappa$ cardinali infiniti. Assumendo l'*ipotesi generalizzata del continuo*, dimostrare che se $\nu < \mathrm{cof}(\kappa)$ allora $\kappa^\nu = \kappa$.

Soluzione. (1). Usando l'uguaglianza $\prod_{n<\omega} \aleph_n = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$, e applicando la formula di Hausdorff per i cardinali successori, si ha:

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \left((\aleph_\omega)^{\aleph_0}\right)^{\aleph_1} = \left(\prod_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} \left(2^{\aleph_1} \cdot \aleph_n\right) = \left(2^{\aleph_1}\right)^{\aleph_0} \cdot \prod_{n<\omega} \aleph_n = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}.$$

(2). Ricordiamo che κ^ν è la cardinalità dell'insieme di funzioni $\mathrm{Fun}(\nu, \kappa)$. Vista l'ipotesi $\mathrm{cof}(\kappa) > \nu$, ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è limitata, cioè esiste $\gamma < \kappa$ con $\mathrm{Im}(f) \subseteq \gamma$. Abbiamo dunque:

$$\kappa \leq \kappa^\nu = |\mathrm{Fun}(\nu, \kappa)| = \Big|\bigcup_{\gamma<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu, \gamma)\Big| \leq \sum_{\gamma<\kappa} |\mathrm{Fun}(\nu, \gamma)| = \sum_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\nu = \max\{\sup_{\gamma<\kappa} |\gamma|^\nu, \kappa\} \leq \kappa.$$

Infatti per ogni $\gamma < \kappa$, il cardinale $\mu = \max\{|\gamma|, \nu\} < \kappa$ e quindi, usando l'ipotesi generalizzata del continuo, si ottiene che $|\gamma|^\nu \leq \mu^\mu = \mu^+ \leq \kappa$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Sia γ un ordinale qualunque e sia $n \in \omega$ un naturale con $n > 1$. Dimostrare che per ogni funzione $f : \omega^\gamma \cdot n \to \omega^\gamma \cdot n$ crescente e continua ai limiti si ha che $f(\omega^\gamma) = \omega^\gamma$.

2. Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Fun}(\omega_1, \omega_1)$ un insieme di funzioni $g : \omega_1 \to \omega_1$. Dimostrare che se $|\mathcal{G}| < \aleph_1$ allora esiste un ordinale infinito $\gamma < \omega_1$ con la proprietà che $g(\beta) < \gamma$ per ogni $\beta < \gamma$ e per ogni $g \in \mathcal{G}$.

Soluzione. (1). Se $\gamma = 0$, la tesi è banale. Infatti in questo caso $\omega^\gamma n = 1 \cdot n = n$, ed è immediato verificare che ogni $f : n \to n$ è l'identità. Quindi, $f(\omega^\gamma) = f(1) = 1 = \omega^\gamma$.

Occupiamoci ora del caso generale $\gamma \geq 1$. Mostriamo intanto che se $\xi < \omega^\gamma$ allora $f(\xi) < \omega^\gamma$. Supponiamo per assurdo che sia $f(\xi) \geq \omega^\gamma$ per qualche $\xi < \omega^\gamma$. Visto che ω^γ è additivamente chiuso, si ha che $\xi + \omega^\gamma = \omega^\gamma$ e quindi anche $\xi + \omega^\gamma(n-1) = \omega^\gamma(n-1)$. Dalla crescenza di f segue allora che

$$f\left(\omega^\gamma(n-1)\right) = f\left(\xi + \omega^\gamma(n-1)\right) \geq f(\xi) + \omega^\gamma(n-1) \geq \omega^\gamma + \omega^\gamma(n-1) = \omega^\gamma n,$$

il che è assurdo. Ricordiamo che, per la crescenza di f, si ha $f(\xi) \geq \xi$ per ogni ξ, e quindi $\sup_{\xi<\omega^\gamma} f(\xi) = \omega^\gamma$. Visto che ω^γ è un ordinale limite, la tesi $f(\omega^\gamma) = \omega^\gamma$ segue dalla continuità di f ai limiti.

(2). Per ricorsione numerabile, definiamo la sequenza $\langle \gamma_n \mid n \in \omega \rangle$ ponendo:

$$\gamma_0 = \omega\,; \quad \gamma_{n+1} = \sup\{g(\alpha) + 1 \mid \alpha < \gamma_n\,,\ g \in \mathcal{G}\}.$$

Verifichiamo per induzione che $\gamma_n < \omega_1$ per ogni n. La base $\gamma_0 = \omega < \omega_1$. Assumendo $\gamma_n < \omega_1$, abbiamo che l'insieme $\Gamma_n = \{g(\alpha) + 1 \mid \alpha < \gamma_n\,,\ g \in \mathcal{G}\} \subseteq \omega_1$ è numerabile, visto che $|\gamma_n| < \aleph_1$ e $|\mathcal{G}| < \aleph_1$. Dunque Γ_n è limitato in ω_1 e perciò $\gamma_{n+1} = \sup \Gamma_n < \omega_1$. Mostriamo infine che l'ordinale $\gamma = \sup_n \gamma_n = \bigcup_n \gamma_n$ ha la proprietà richiesta. Anzitutto γ è infinito perché $\gamma \geq \gamma_0 = \omega$. Inoltre, se $\alpha < \gamma$ e $g \in \mathcal{G}$, esiste n con $\alpha < \gamma_n$, e quindi $g(\alpha) < g(\alpha) + 1 \leq \gamma_{n+1} \leq \gamma$.
(Notiamo che non necessariamente la sequenza $\langle \gamma_n \mid n \in \omega \rangle$ è crescente.)