Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 21 Gennaio 2019

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti] Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $Y_1 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione finita di $\mathbb{R}\}$;
2. $Y_2 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione numerabile di $\mathbb{R}\}$;
3. $Y_3 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{R}\}$;
4. $Y_4 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di $\mathbb{R}$ tale che $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$ e dove $|A| = \mathfrak{c}$ per ogni $A \in \mathcal{F}\}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Siano $n, m, k \in \omega$ naturali non nulli. Determinare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2 n + \omega m + k)^{\omega+2}$.
2. Trovare tutti e soli gli ordinali α tali che $(\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = \alpha$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che se $2^{\aleph_1} = \aleph_{17}$ e se $\aleph_\omega^{\aleph_0} \geq \aleph_{\omega_1}$ allora $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.
2. Sia κ un cardinale singolare, e supponiamo che la sequenza di cardinali $\langle 2^\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ sia definitivamente costante ed uguale a μ (cioè esiste $\xi < \kappa$ tale che per ogni $\xi \leq \nu < \kappa$ si ha $2^\nu = \mu$). Dimostrare che allora anche $2^\kappa = \mu$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Mostrare un esempio di ordinale α di cofinalità numerabile tale che ogni funzione $g : \alpha \to \alpha$ crescente e continua ai limiti ammette almeno un punto fisso.
2. Dimostrare che se l'ordinale α ha cofinalità numerabile ed è anche additivamente chiuso[2], allora esistono funzioni $g : \alpha \to \alpha$ crescenti e continue ai limiti senza punti fissi.

[1] Una *partizione* di un insieme X è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di insiemi a due a due disgiunti tali che $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = X$.
[2] Ricordare che un ordinale α è *additivamente chiuso* se vale la proprietà: $\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \beta + \gamma < \alpha$.