Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 11 Giugno 2018

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 punti]

1. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti. Dimostrare che allora $\mathcal{F}$ è al più numerabile.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}$ di tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali in sé.
3. Sia G un gruppo infinito. Dimostrare che per ogni $X \subseteq G$ numerabile, il sottogruppo $\langle X \rangle$ generato da X ha cardinalità numerabile.[1]
4. Generalizzare come segue la proprietà di sopra: Per ogni gruppo infinito G e per ogni $X \subseteq G$ infinito, il sottogruppo generato $\langle X \rangle$ ha la stessa cardinalità di X.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Determinare le coppie di ordinali (α, β) (non nulli) tali che l'esponenziale α^β è un ordinale successore.
2. Siano $\alpha, \beta < \omega^2$ con $\alpha, \beta \geq \omega$. Dimostrare che $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ se e solo se $\alpha = \beta$.
3. Determinare le coppie (α, β) di ordinali $\alpha, \beta < \omega^\omega$ tali che $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema di Cantor: "Per ogni insieme infinito A vale la disuguaglianza stretta $\mathrm{cof}(|\mathcal{P}(A)|) > |A|$".
2. Supponiamo che $\aleph_{\omega+\omega}$ sia un limite forte. Dimostrare che allora $(\aleph_{\omega+\omega})^\nu = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0}$ per ogni cardinale infinito $\nu < \aleph_{\omega+\omega}$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Sia $\mathbb{V} = \bigcup_\alpha V_\alpha$ la classe degli insiemi ben fondati, e sia $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una funzione classe. Dimostrare che esistono ordinali α arbitrariamente grandi con la proprietà che $F(x) \in V_\alpha$ per ogni $x \in V_\alpha$.
2. Stabilire per quali ordinali α vale la seguente proprietà: "Ogni $f : \omega_2 \to \omega_2 + \alpha$ strettamente crescente e continua ha $\aleph_2$ punti fissi".
3. Per quali ordinali α vale la seguente proprietà ? "Ogni $f : \omega_2 \to \omega_2 \cdot \alpha$ strettamente crescente e continua ha $\aleph_2$ punti fissi".

[1] Il *sottogruppo generato* $\langle X \rangle$ è il più piccolo sottogruppo che include X.