Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 18 Gennaio 2018

Soluzioni

Esercizio 1. [8 punti]

1. Determinare la cardinalità dell'insieme S di tutte le successioni $\sigma : \mathbb{N} \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ di funzioni continue su $\mathbb{R}$.
2. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathrm{Seq}(\mathbb{Q}[X])$ delle sequenze finite $\langle P_i(X) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\rangle$ di polinomi $P_i(X) \in \mathbb{Q}[X]$ a coefficienti razionali;
3. Dimostrare che se $|\mathbb{R}| > \aleph_\omega$ allora $|\mathbb{R}| = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Soluzione. (1). Abbiamo visto a lezione che $|\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$. Allora

$$|S| \;=\; |\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))| \;=\; |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})|^{|\mathbb{N}|} \;=\; \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} \;=\; 2^{\aleph_0}.$$

(2). Ricordiamo che, come abbiamo visto a lezione, se un insieme $|A| = \aleph_0$ allora anche l'insieme delle sequenze finite di elementi di A ha cardinalità $|\mathrm{Seq}(A)| = \aleph_0$.[1] I polinomi $b_0 + b_1 X + \ldots + b_k X^k$ di $\mathbb{Q}[X]$ sono in corrispondenza biunivoca con le sequenze finite $\langle b_0, b_1, \ldots, a_k\rangle \in \mathrm{Seq}(\mathbb{Q})$ di numeri razionali; dunque $|\mathbb{Q}[X]| = \mathrm{Seq}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, e quindi anche $|\mathrm{Seq}(\mathbb{Q}[X])| = \aleph_0$.

(3). Segue dalle seguenti (dis)uguaglianze:

$$|\mathbb{R}| \;=\; 2^{\aleph_0} \;\leq\; \aleph_\omega^{\aleph_0} \;\leq\; |\mathbb{R}|^{\aleph_0} \;=\; \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} \;=\; 2^{\aleph_0} \;=\; |\mathbb{R}|.$$

Esercizio 2. [8 punti]

1. Dimostrare che per ogni coppia di naturali $n, m \neq 0$ esiste una funzione $g : \omega_1 \cdot n \to \omega_1 \cdot m$ illimitata.
2. Dimostrare che per ogni coppia di naturali $n, m \neq 0$, esiste una funzione $g : \omega_1 \cdot n \to \omega_1 \cdot m$ crescente se e solo se $n \leq m$.
3. Dimostrare che per ogni ordinale γ esistono funzioni $g : \gamma \cdot \omega \to \gamma \cdot \omega$ crescenti, illimitate, continue ai limiti, ma prive di punti fissi.

Soluzione. (1). Notiamo che $|\omega_1 \cdot k| = \aleph_1 \cdot k = \aleph_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e quindi $|\omega_1 \cdot n| = |\omega_1 \cdot m|$. Ogni bigezione $f : \omega_1 \cdot n \to \omega_1 \cdot m$ è banalmente illimitata.

(2). Supponiamo $n \leq m$, e sia $k = m - n$. Usando la divisione euclidea, sappiamo che ogni ordinale $\gamma \in \omega_1 \cdot n$ si scrive in modo unico nella forma $\gamma = \omega_1 \cdot i + \delta$ dove $i < n$ e $\delta < \omega_1$. La funzione $f : \omega_1 \cdot n \to \omega_1 \cdot m$ dove $f(\omega_1 \cdot i + \delta) = \omega_1 \cdot (i + k) + \delta$ per ogni $i < n$ e $\delta < \omega_1$ è crescente.

Viceversa, se $f : \omega_1 \cdot n \to \omega_1 \cdot m$ è crescente e per assurdo fosse $n > m$, allora avremmo $\omega_1 \cdot m \in \omega_1 \cdot n$. Questo è assurdo perchè ogni funzione crescente f fra ordinali soddisfa $f(\alpha) \geq \alpha$, e quindi avremmo che $f(\omega_1 \cdot m) = \omega_1 \cdot m \in \omega_1 \cdot m$.

(3). Con la divisione euclidea, ogni ordinale $\alpha < \gamma \cdot \omega$ si scrive in modo unico nella forma $\alpha = \gamma \cdot n + \delta$ dove $n < \omega$ e $\delta < \gamma$. La funzione $f : \gamma \cdot \omega \to \gamma \cdot \omega$ dove $f(\gamma \cdot n + \delta) = \gamma \cdot (n+1) + \delta$ è crescente, illimitata, continua ai limiti, ma priva di punti fissi perché $\gamma \cdot n + \delta < \gamma \cdot n + \gamma = \gamma \cdot (n+1) \leq f(\gamma \cdot n + \delta)$.

Esercizio 3. [8 punti]

[1] Infatti $\mathrm{Seq}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$, e visto che $|X^n| = \aleph_0^n = \aleph_0$, si ha che $|\mathrm{Seq}(X)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0 = \aleph_0$.

1. Scrivere l'ordinale $(\omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 5)^3$ in forma normale di Cantor.

2. Dimostrare che un ordinale ξ soddisfa l'uguaglianza $\xi + \omega = \omega \cdot \xi$ se e solo se esiste ζ tale che $\xi = \omega^\omega \cdot \zeta + 1$.

Soluzione. (1). Raccogliendo a sinistra abbiamo che $\omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 5 = \omega \cdot \gamma$ dove $\gamma = \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 5$. Visto che $\omega^2 \cdot 3 < \gamma < \omega^2 \cdot 3 + \omega^2 = \omega^2 \cdot 4$ si ha

$$\omega^3 \;=\; \omega^2 \cdot \omega \;=\; \omega^2 \cdot 3 \cdot \omega \;\leq\; \gamma \cdot \omega \;\leq\; \omega^2 \cdot 4 \cdot \omega \;=\; \omega^2 \cdot \omega = \omega^3,$$

e quindi $\gamma \cdot \omega = \omega^3$. Abbiamo:

$$(\omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 5)^3 \;=\; \omega \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \omega \cdot \gamma \;=\; \omega \cdot \omega^3 \cdot \omega^3 \cdot \gamma \;=\; \omega^7 \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 2 + 5) \;=\; \omega^9 \cdot 3 + \omega^8 \cdot 2 + \omega^7 \cdot 5.$$

(2). Se $\xi = \omega^\omega \cdot \zeta + 1$ per un opportuno ζ allora $\xi + \omega = \omega^\omega \cdot \zeta + 1 + \omega = \omega^\omega \cdot \zeta + \omega$ ed anche $\omega \cdot \xi = \omega \cdot \omega^\omega \cdot \zeta + \omega \cdot 1 = \omega^\omega \cdot \zeta + \omega$.

Viceversa, con la divisione euclidea scrivo $\zeta = \omega^\omega \cdot \zeta + \rho$ dove $\rho < \omega^\omega$. Abbiamo che $\omega \cdot \xi = \omega^\omega \cdot \zeta + \omega \cdot \rho$ e $\xi + \omega = \omega^\omega \cdot \zeta + \rho + \omega$, quindi si ha l'uguaglianza $\omega \cdot \xi = \xi + \omega$ se e solo se $\omega \cdot \rho = \rho + \omega$. Dobbiamo vedere che questo accade se e solo se $\rho = 1$. Intanto, ρ non è infinito altrimenti esisterebbe un naturale $n \geq 1$ con $\omega^n \leq \rho < \omega^{n+1}$; ma allora si avrebbe che $\rho + \omega < \omega^{n+1}$ e $\omega \cdot \rho \geq \omega^{n+1}$, contraddicendo l'uguaglianza $\omega \cdot \rho = \rho + \omega$. Allora $\rho \in \omega$ è finito, e da $\omega \cdot \rho = \rho + \omega = \omega$ segue necessariamente che $\rho = 1$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Determinare la classe di tutti gli ordinali α che soddisfano la seguente proprietà:[2]

$$A, B \in V_\alpha \implies \{f \mid f : A \to B\} \in V_\alpha.$$

2. Determinare la classe di tutti gli ordinali α che soddisfano la seguente proprietà:

$$\{f \mid f : V_{\omega+1} \to V_\alpha\} \subseteq V_\alpha.$$

3. Determinare la classe di tutti gli ordinali α che soddisfano la seguente proprietà:

   - Tutte le sequenze $\langle f_i \mid i \in \beth_{\omega+1}\rangle$ di funzioni $f_i : V_{\omega+\omega} \to V_\alpha$ appartengono a V_α.[3]

Soluzione. (1). Vediamo prima che se $\alpha = \beta + 1$ è un ordinale successore allora tla proprietà non vale, mostrando che $\beta \in V_\alpha$ ma $\mathrm{Fun}(\beta, \beta) \notin V_{\beta+1}$. Se così non fosse, si avrebbe che $\mathrm{Fun}(\beta, \beta) \subseteq V_\beta$, e quindi la funzione identità $\imath : \beta \to \beta$ apparterrebbe a V_β. Questo è non può succedere perché, come abbiamo visto a lezione, se una funzione $f \in V_\beta$ allora anche il suo dominio $\mathrm{dom}(f) \in V_\beta$; e nel nostro caso si avrebbe $\mathrm{dom}(\imath) = \beta \in V_\beta$, il che è assurdo.

Se α è limite, allora esiste $\beta < \alpha$ con $A, B \in V_\beta$. Come abbiamo visto a lezione, ogni $f : A \to B$ è tale che $f \subseteq A \times B \in V_{\beta+3}$, quindi $\mathrm{Fun}(A, B) \subseteq V_{\beta+3} \Rightarrow \mathrm{Fun}(A, B) \in V_{\beta+4} \subseteq V_\alpha$.

(2). Sono tutti e soli gli ordinali α tali che $\mathrm{cof}(\alpha) > 2^{\aleph_0}$. Anzitutto ricordiamo che $|V_\omega| = \aleph_0$, e quindi $|V_{\omega+1}| = |\mathcal{P}(V_\omega)| = 2^{\aleph_0}$. Per ogni b denotiamo con $\rho(b) = \min\{\beta \mid a \in V_\beta\}$. Per ogni $f : V_{\omega+1} \to V_\alpha$, l'insieme $G_f = \{\rho(f(a)) \mid a \in V_{\omega+1}\}$ è un sottoinsieme di α di cardinalità al più $|V_{\omega+1}| = 2^{\aleph_0}$. Se $\mathrm{cof}(\alpha) > 2^{\aleph_0}$ allora quell'insieme è limitato, quindi $\gamma = \sup G_f < \alpha$. Visto che banalmente $\omega + 1 < \alpha$ ed inoltre $\mathrm{Im}(f) \subseteq V_\gamma$, si ha $f \subseteq V_\gamma \times V_\gamma \Rightarrow f \in V_\alpha$.

[2] V_α è il livello γ nella *gerarchia cumulativa di von Neumann*, che è definita per ricorsione transfinita ponendo $V_0 = \emptyset$; $V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma)$; $V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma$ se λ limite.

[3] La sequenza dei *beth* è definita per ricorsione transfinita ponendo $\beth_0 = \aleph_0$; $\beth_{\gamma+1} = 2^{\beth_\gamma}$; $\beth_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \beth_\gamma$ se λ limite.

Viceversa, se $\text{cof}(\alpha) \leq 2^{\aleph_0}$, allora esiste una funzione illimitata $f : V_{\omega+1} \to \alpha$. Una tale funzione $f \notin V_\alpha$, altrimenti si avrebbe che $\text{Im}(f) \in V_\alpha \Rightarrow \alpha = \bigcup \text{Im}(f) \in V_\alpha$, una contraddizione.

(3). Sono tutti e soli gli ordinali α tali che $\text{cof}(\alpha) > \beth_{\omega+1}$. Come abbiamo visto a lezione, $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$, e in particolare $|V_{\omega+\omega}| = \beth_\omega$. Sia ora $\langle f_i \mid i \in \beth_{\omega+1} \rangle$ una sequenza di funzioni $f_i : V_{\omega+\omega} \to V_\alpha$. Esattamente come mostrato nella domanda precedente, se $\text{cof}(\alpha) > \beth_\omega$ ogni funzione $f_i : V_{\omega+\omega} \to V_\alpha$ appartiene a V_α. Inoltre $\mathcal{R} = \{\rho(f_i) \mid i \in \beth_{\omega+1}\}$ è un sottoinsieme limitato di α perché $|\mathcal{R}| \leq \beth_{\omega+1} < \text{cof}(\alpha)$, quindi esiste $\beta < \alpha$ con $f_i \in V_\beta$ per ogni $i \in \beth_{\omega+1}$; allora $\langle f_i \mid i \in \beth_{\omega+1} \rangle \in \text{Fun}(\beth_{\omega+1}, V_\beta)$, e quindi $\langle f_i \mid i \in \beth_{\omega+1} \rangle \in V_\alpha$, visto che $\beth_{\omega+1} < \text{cof}(\alpha) \leq \alpha \Rightarrow \beth_{\omega+1} \in V_\alpha$.