Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 13 Febbraio 2015

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Assumiamo l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè $2^\kappa = \kappa^+$ per ogni cardinale infinito κ. Calcolare le seguenti esponenziazioni:

$$(a)\ (\aleph_\omega)^{\aleph_0}\,; \quad (b)\ (\aleph_{\omega+\omega+7})^{\aleph_0}\,; \quad (c)\ (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_0}\,; \quad (d)\ (\aleph_{\omega_1+5})^{\aleph_{\omega+11}}.$$

Soluzione. (a). Il risultato è $\aleph_{\omega+1}$. Infatti, $(\aleph_\omega)^{\aleph_0} = (\aleph_\omega)^{\mathrm{cof}(\aleph_\omega)} > \aleph_\omega$. Abbiamo allora le disuguaglianze:

$$\aleph_{\omega+1} \ \leq\ (\aleph_\omega)^{\aleph_0} \ \leq\ (\aleph_\omega)^{\aleph_\omega} \ =\ 2^{\aleph_\omega} \ =\ \aleph_{\omega+1},$$

dove l'ultima uguaglianza vale per l'*ipotesi generalizzata del continuo*.

(b). Il risultato è $\aleph_{\omega+\omega+7}$. Infatti, per l'*ipotesi generalizzata del continuo*, $\aleph_{\omega+\omega+7} = 2^{\aleph_{\omega+\omega+6}}$, e dunque:

$$(\aleph_{\omega+\omega+7})^{\aleph_0} \ =\ (2^{\aleph_{\omega+\omega+6}})^{\aleph_0} \ =\ 2^{\aleph_{\omega+\omega+6}\cdot\aleph_0} \ =\ 2^{\aleph_{\omega+\omega+6}} \ =\ \aleph_{\omega+\omega+7}.$$

(c). Il risultato è $\aleph_{\omega_1}$. Visto che $\aleph_{\omega_1}$ ha cofinalità $\aleph_1 > \aleph_0$, ogni funzione $f : \aleph_0 \to \aleph_{\omega_1}$ è limitata, e dunque

$$(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_0} \ =\ \Big|\mathrm{Fun}(\aleph_0, \aleph_{\omega_1})\Big| \ =\ \Big|\bigcup_{\alpha<\aleph_{\omega_1}} \mathrm{Fun}(\aleph_0, \alpha)\Big| \ =\ \sum_{\alpha<\aleph_{\omega_1}} |\alpha|^{\aleph_0} \ =\ \max\left\{\aleph_{\omega_1}\,;\ \sup_{\alpha<\aleph_{\omega_1}} |\alpha|^{\aleph_0}\right\}.$$

Infine notiamo che per ogni $\alpha < \aleph_{\omega_1}$ esiste $\gamma < \omega_1$ con $\alpha < \aleph_\gamma$, e quindi

$$|\alpha|^{\aleph_0} \ \leq\ (\aleph_\gamma)^{\aleph_0} \ \leq\ (\aleph_\gamma)^{\aleph_\gamma} \ =\ 2^{\aleph_\gamma} \ =\ \aleph_{\gamma+1} \ <\ \aleph_{\omega_1}.$$

(d). Il risultato è $\aleph_{\omega_1+5}$. Infatti, per l'*ipotesi generalizzata del continuo*, $\aleph_{\omega_1+5} = 2^{\aleph_{\omega_1+4}}$, e dunque:

$$(\aleph_{\omega_1+5})^{\aleph_{\omega+11}} \ =\ (2^{\aleph_{\omega_1+4}})^{\aleph_{\omega+11}} \ =\ 2^{\aleph_{\omega_1+4}\cdot\aleph_{\omega+11}} \ =\ 2^{\aleph_{\omega_1+4}} \ =\ \aleph_{\omega_1+5}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali positivi. La *densità asintotica superiore* $\overline{d}(A)$ di un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è definita ponendo

$$\overline{d}(A) \ =\ \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}.$$

Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

$$\mathcal{F}_1 \ =\ \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{d}(A) = 0\}\,; \quad \mathcal{F}_2 \ =\ \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{d}(A) > 0\}\,; \quad \mathcal{F}_3 \ =\ \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{d}(A) = 1/2\}.$$

Soluzione. Tutti gli insieme considerati hanno la cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$. Per dimostrarlo, notiamo intanto che, essendo tutti sottoinsiemi di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, valgono le disuguaglianze $|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2|, |\mathcal{F}_3| \leq \mathfrak{c}$.

Adesso prendiamo un insieme infinito $B \subseteq \mathbb{N}$ con $\overline{d}(B) = 0$, ad esempio l'insieme dei quadrati $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. È immediato verificare che $A \subseteq A' \Rightarrow \overline{d}(A) \leq \overline{d}(A')$. Segue allora che anche tutti i sottoinsiemi di B hanno densità asintotica superiore nulla, cioè $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{F}_1$. Questo garantisce che $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(B)| \leq |\mathcal{F}_1|$ e quindi, per Cantor-Bernstein, $|\mathcal{F}_1| = \mathfrak{c}$.

Banalmente $|\mathcal{F}_3| \leq |\mathcal{F}_2|$, visto che $\mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}_2$. Per concludere $|\mathcal{F}_2| = |\mathcal{F}_3| = \mathfrak{c}$, resta quindi da verificare che $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{F}_3|$. Un possibile modo per farlo è il seguente. Sia $P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei numeri pari, e sia $Q = \{(2n-1)^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei quadrati dispari. Con un semplice calcolo si può verificare che $\overline{d}(P) = \overline{d}(P \cup Q) = 1/2$.[1] Ma allora, anche per ogni sottoinsieme $Q' \subseteq Q$ si ha che $\overline{d}(P \cup Q') = 1/2$, visto che $P \subseteq P \cup Q' \subseteq P \cup Q$. La corrispondenza $Q' \mapsto P \cup Q'$ è una bigezione tra $\mathcal{P}(Q)$ e la famiglia $\mathcal{G} = \{P \cup Q' \mid Q' \subseteq Q\}$, che ha quindi cardinalità $\mathfrak{c}$. Infine, dall'inclusione $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_3$, segue che $\mathfrak{c} = |\mathcal{G}| \leq |\mathcal{F}_3|$, come volevamo.

Esercizio 3. Dimostrare che ogni funzione $f : \omega_1 \cdot \gamma \to \omega_1 \cdot \gamma$ crescente e continua ai limiti ammette punti fissi se e solo se γ è successore.

Soluzione. Dimostriamo prima che se $\gamma = \lambda$ è limite, allora esistono funzioni $f : \omega_1 \cdot \lambda \to \omega_1 \cdot \lambda$ che sono crescenti e continue ai limiti ma prive di punti fissi. Ad esempio, preso $\xi < \omega_1 \cdot \lambda$, mediante la divisione euclidea scriviamo $\xi = \omega_1 \cdot \alpha + \rho$ dove $\alpha < \lambda$ e $\rho < \omega_1$, e poniamo $f(\xi) = \omega_1 \cdot (\alpha + 1) + \rho$. È facile verificare che una tale f è crescente e continua ai limiti; inoltre f non ha punti fissi perché $f(\xi) > \xi$ per ogni ξ.

Se γ è successore, scriviamo $\gamma = \eta + 1$. Ricordiamo che ogni funzione crescente $\varphi : \beta \to \beta$ da un ordinale in se stesso è tale che $\varphi(\xi) \geq \xi$ per ogni $\xi < \beta$. Nel nostro caso, questo ci dice che $f(\xi) \geq \omega_1 \cdot \eta$ per ogni $\xi \geq \omega_1 \cdot \eta$. Ma allora "traslando" indietro di $\omega \cdot \eta$, la funzione f determina una funzione $g : \omega_1 \to \omega_1$ definita ponendo $g(\zeta) = f(\omega_1 \cdot \eta + \zeta) - \omega_1 \cdot \eta$. In altre parole, $g(\zeta) = \beta$ è quell'unico ordinale β tale che $f(\omega_1 \cdot \eta + \zeta) = \omega_1 \cdot \eta + \beta$. Una tale g è crescente e continua ai limiti perché f lo è. Abbiamo visto a lezione che ogni funzione $g : \omega_1 \to \omega_1$ crescente e continua ai limiti ammette punti fissi, e quindi esiste $\xi < \omega_1$ con $g(\xi) = \xi$.[2] Ma allora

$$f(\omega_1 \cdot \eta + \xi) \;=\; \omega_1 \cdot \eta + g(\xi) \;=\; \omega_1 \cdot \eta + \xi$$

ed anche f ha un punto fisso.

Esercizio 4. Dimostrare *in dettaglio* che le due seguenti proprietà di un ordinale infinito α sono equivalenti:

1. $\alpha = \omega^{(\omega^\delta)}$ per un opportuno δ.

2. Per ogni $0 < \beta < \alpha$, il prodotto $\beta \cdot \alpha = \alpha$.

Soluzione. (1) $\Rightarrow$ (2). Se $\delta = 0$, allora $\alpha = \omega$, e sappiamo che $n \cdot \omega = \omega$ per ogni $n < \omega$. Se $\delta > 0$ allora ω^δ è un ordinale limite e $\alpha = \bigcup_{\gamma < \omega^\delta} \omega^\gamma$. Quindi, se $\beta < \alpha$, esiste $\gamma < \omega^\delta$ con $\beta < \omega^\gamma$. Ma allora

$$\alpha \;\leq\; \beta \cdot \alpha \;\leq\; \omega^\gamma \cdot \omega^{(\omega^\delta)} \;=\; \omega^{(\gamma + \omega^\delta)} \;=\; \omega^{(\omega^\delta)} \;=\; \alpha.$$

Ricordiamo infatti che, per un risultato dimostrato a lezione, se $\gamma < \omega^\delta$ allora $\gamma + \omega^\delta = \omega^\delta$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sia $\gamma \geq 1$ tale che $\omega^\gamma \leq \alpha < \omega^{\gamma+1}$. Notiamo che

$$\omega^\gamma \cdot \alpha \;\geq\; \omega^\gamma \cdot \omega^\gamma \;=\; \omega^{\gamma+\gamma} \;\geq\; \omega^{\gamma+1} \;>\; \alpha\,,$$

[1] Attenzione! In generale, anche per sottoinsiemi disgiunti, vale solo la disuguaglianza $\overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$. Si possono addirittura trovare insiemi disgiunti A e B tali che $\overline{d}(A) = \overline{d}(B) = 1$; ad esempio, $A = \bigcup_n [(2n-1)!, 2n!)$ e $B = \mathbb{N} \setminus A = \bigcup_n [2n!, (2n+1)!)$ hanno entrambi densità asintotica superiore uguale a 1.

[2] In realtà, di tali punti fissi ne esiste un insieme di cardinalità $\aleph_1$.

e quindi, per non contraddire l'ipotesi, non può essere $\omega^\gamma < \alpha$. Dunque $\alpha = \omega^\gamma$ è una potenza di ω. Sia adesso δ tale che $\omega^\delta \leq \gamma < \omega^{\delta+1}$. Con la divisione euclidea, scriviamo $\gamma = \omega^\delta \cdot n + \rho$ dove il quoziente $1 \leq n < \omega$ e il resto $\rho < \omega^\delta$. Se dimostriamo che $n = 1$ e $\rho = 0$, abbiamo la tesi $\alpha = \omega^\gamma = \omega^{(\omega^\delta)}$. Ma questo è vero perché altrimenti avremmo che $\omega^\delta < \gamma$, e quindi $\beta = \omega^{(\omega^\delta)} < \omega^\gamma = \alpha$, e le seguenti disuguaglianze contraddirebbero la nostra ipotesi:

$$\beta \cdot \alpha \;\geq\; \omega^{(\omega^\delta)} \cdot \omega^{(\omega^\delta \cdot n)} \;=\; \omega^{(\omega^\delta + \omega^\delta \cdot n)} \;=\; \omega^{(\omega^\delta \cdot (n+1))} \;>\; \omega^\gamma \;=\; \alpha.$$

Esercizio 5. Sia κ un cardinale limite e sia $\nu = \mathrm{cof}(\kappa)$. Dimostrare che per ogni cardinale $\mu < \kappa$ esiste una sequenza crescente di cardinali $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \nu \rangle$ tale che $\kappa = \sum_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha$ e dove $\mathrm{cof}(\kappa_\alpha) > \mu$ per ogni α.

Soluzione. Sia $\kappa = \aleph_\lambda$ dove λ è limite, e sia $\mu = \aleph_\gamma$ dove $\gamma < \lambda$. Visto che $\nu = \mathrm{cof}(\kappa) = \mathrm{cof}(\lambda)$, possiamo fissare una funzione crescente e illimitata $f : \nu \to \lambda$. Prendiamo β tale che $f(\beta) > \gamma$, e definiamo $g(\alpha) = f(\beta + \alpha)$. È facile verificare che anche $g : \nu \to \lambda$ è crescente e illimitata, ed inoltre $g(\alpha) > \gamma$ per ogni $\alpha < \nu$. Per ogni $\alpha < \nu$, considero $\kappa_\alpha = \aleph_{g(\alpha)+1}$. Notiamo che, in quanto cardinale successore, $\mathrm{cof}(\kappa_\alpha) = \kappa_\alpha > \aleph_\gamma = \mu$. Inoltre

$$\sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \;=\; \max\left\{\sup_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha \,;\; |\lambda|\right\} \;=\; \aleph_\lambda \;=\; \kappa.$$