Elementi di Logica Matematica
Sesto Appello Straordinario - Prova scritta del 8 Aprile 2010

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:[1]

1. $Y_1 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione finita di $\omega\}$;
2. $Y_2 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di ω in infiniti pezzi infiniti$\}$;
3. $Y_3 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di ω_1 in $\aleph_0$ pezzi ognuno di cardinalità $\aleph_1\}$.
4. $Y_4 = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F}$ è una partizione di ω_n in $\aleph_n$ pezzi ognuno di cardinalità $\aleph_m\}$, dove $m \leq n$ sono numeri naturali.

Esercizio 2. Dimostrare in dettaglio che per ogni $0 \neq n \in \omega$ valgono le seguenti proprietà:

1. $\omega^{\omega \cdot n} \cdot \xi = \xi$ se e solo se esiste ζ tale che $\xi = \omega^{\omega^2} \cdot \zeta$.
2. $\omega^{\omega \cdot n} \cdot \vartheta = \vartheta + \omega^{\omega \cdot n}$ se e solo se esiste η tale che $\vartheta = \omega^{\omega^2} \cdot \eta + 1$.

Esercizio 3. Sia β un ordinale qualunque. Dimostrare che se $\kappa = \min\{\alpha > \beta \mid \aleph_\alpha = \alpha\}$, allora $\mathrm{cof}(\kappa) = \aleph_0$.

Esercizio 4. Ricordiamo la cosidetta *ipotesi dei cardinali singolari*:[2]

- (SCH) Per ogni cardinale κ infinito, $\kappa^{\mathrm{cof}\,\kappa} = \kappa^+ \cdot 2^{\mathrm{cof}\,\kappa}$.

Vale il seguente risultato (Teorema di Silver):

- *Se SCH non vale, allora il più piccolo controesempio κ ha cofinalità numerabile.*

Usando il Teorema di Silver, dimostrare che vale la seguente implicazione:

- Se per ogni cardinale regolare $\kappa > 2^{\aleph_0}$ si ha $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, allora SCH vale.

Esercizio 5. Sia κ un cardinale infinito e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $f : \kappa^+ \to \kappa^+$ *strettamente crescenti* (cioè $\alpha < \beta < \kappa \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$) e *continue ai limiti* (cioè se $\lambda < \kappa^+$ è un ordinale limite, allora $f(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$). Supponiamo che $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Dimostrare che:

1. $\mathcal{F}$ ammette *punti fissi* comuni, cioè esistono $\alpha < \kappa^+$ tali che $f(\alpha) = \alpha$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.
2. L'insieme dei punti fissi comuni $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}) = \{\alpha < \kappa^+ \mid \forall f \in \mathcal{F}\ f(\alpha) = \alpha\}$ ha cardinalità κ^+.

---

[1] Ricordiamo che una *partizione* di un insieme X è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ di insiemi a due a due disgiunti e tali che $\bigcup \mathcal{F} = X$.

[2] Si tratta di una proprietà indipendente da ZFC.