Elementi di Logica Matematica
Primo Appello - Prova scritta dell'8 Luglio 2009

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $A = \{f \text{ funzione} \mid \mathrm{dom}(f) \subset \omega_2 \text{ è finito } \& \ \mathrm{imm}(f) \subset \omega_1\}$.
2. $B = \{f \text{ funzione} \mid \mathrm{dom}(f) \subset \omega_2 \text{ ha cardinalità } \aleph_0 \ \& \ \mathrm{imm}(f) \subseteq \omega\}$.
3. $C = \{f \text{ funzione} \mid \mathrm{dom}(f) \subset \omega_2 \text{ ha cardinalità } \aleph_1 \ \& \ \mathrm{imm}(f) \subseteq \omega_1\}$.
4. $E = \{f \text{ funzione} \mid f : \omega_2 \to \omega_1 \text{ limitata}\}$.
5. $F = \{f \text{ funzione} \mid f : \omega_2 \to \omega_1 \text{ illimitata}\}$.

Esercizio 2. Determinare tutte le coppie di ordinali (α, β) tali che $\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta \cdot \alpha$.

Esercizio 3. Sia $\mathbf{F} : \mathbf{ORD} \to \mathbf{ORD}$ una funzione-classe, dove $\mathbf{ORD}$ denota la classe degli ordinali.

1. Dimostrare che se $\mathbf{F}$ è strettamente crescente, allora $\mathbf{F}$ è illimitata.
2. Più in generale, dimostrare che se la controimmagine $\mathbf{F}^{-1}(\{\alpha\}) = \{\beta \in \mathbf{ORD} \mid \mathbf{F}(\beta) = \alpha\}$ è un insieme per ogni ordinale α, allora $\mathbf{F}$ è illimitata.
3. Vale l'implicazione inversa nel punto 2?

Esercizio 4. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \prod_{n\in\omega} \aleph_n = |[\aleph_\omega]^{\aleph_0}|$$

dove $[\aleph_\omega]^{\aleph_0} = \{A \subseteq \aleph_\omega : |A| = \aleph_0\}$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi infiniti numerabili di $\aleph_\omega$.

Esercizio 5. Sia α un ordinale qualunque. Una funzione $f : \alpha \to \alpha$ si dice *crescente* se $\gamma < \gamma' \Rightarrow f(\gamma) < f(\gamma')$, e si dice *continua* se $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$ per ogni $\lambda < \alpha$ limite.

1. Dimostrare che ogni $f : \omega_1 \to \omega_1$ crescente e continua ammette *punti fissi*, cioè esistono γ tali che $f(\gamma) = \gamma$.
2. Vale la proprietà (1) se rimpiazziamo ω_1 con un ordinale ordinale limite α qualunque? (Se la risposta è sì, darne una dimostrazione; altrimenti trovare controesempi.)
3. Dimostrare il seguente rafforzamento della proprietà (1): Ogni famiglia numerabile $\mathcal{F}$ di funzioni $f : \omega_1 \to \omega_1$ crescenti e continue ammette punti fissi comuni, cioè esistono γ tali che $f(\gamma) = \gamma$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.