Elementi di Logica Matematica
Prova scritta del 13 Giugno 2006

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $Y_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ è finito }\}$.
2. $Y_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ bigezione }\}$.
3. $Y_3 = \{f : (0,1) \to (0,1) \mid f \text{ discontinua in al più una quantità numerabile di punti }\}$.
4. $Y_4 = \bigcup_{\gamma<\omega_1} A_\gamma$ dove $\{A_\gamma \mid \gamma < \omega_1\}$ è una famiglia di aperti (non vuoti) di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.

1. Supponiamo che $|X| \leq |Z|$ dove Z è bene ordinabile. Senza usare l'assioma di scelta, dimostrare che se esiste $g : X \to Y$ suriettiva, allora $|Y| \leq |X|$.
2. Usando l'assioma di scelta, dimostrare la seguente proprietà:
$$(\star) \quad |Y| \leq |X| \text{ se e solo se esiste } g : X \to Y \text{ suriettiva.}$$

Esercizio 3. Determinare quoziente e resto della divisione euclidea tra gli ordinali $\omega^2 + \omega \cdot 3 + 2$ e $\omega + 4$.

Esercizio 4.
La famiglia dei *Boreliani* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è definita come la più piccola σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che contiene tutti gli aperti.[1] Per induzione transfinita, poniamo:

$$\begin{cases} B_0 = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ è aperto }\} \\ B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup \{X^c \mid X \in B_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n<\omega} X_n \mid X_n \in B_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n<\omega} X_n \mid X_n \in B_\alpha\} \\ B_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} B_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.
2. Qual è la cardinalità di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Esercizio 5.
Un cardinale non numerabile κ si dice *limite forte* se $\nu^\mu < \kappa$ per ogni $\nu, \mu < \kappa$.

1. Dimostrare che se κ è limite forte allora κ è un cardinale limite.
2. Dimostrare che κ è limite forte se e solo se $2^\nu < \kappa$ per ogni cardinale $\nu < \kappa$.
3. Dimostrare che esistono limiti forti.

Esercizio facoltativo. [DIFFICILE. Fare solo dopo aver risolto gli altri esercizi.]
Sia κ un cardinale con $\aleph_0 \leq \kappa \leq \mathfrak{c}$, dove $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ è la cardinalità del continuo. Dimostrare che le seguenti due condizioni sono equivalenti:

1. Per ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ di cardinalità $|X| = \kappa$, esiste un razionale $q \in \mathbb{Q}$ tale che:
$$|X \cap (-\infty, q)| = |X \cap (q, +\infty)| = \kappa.$$
2. La cofinalità di κ è più che numerabile: $\mathrm{cof}(\kappa) > \aleph_0$.

[1] Ricordare che una σ-algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complementi, e chiusa per intersezioni e unioni numerabili.