Elementi di Logica Matematica
Terzo Test del 27 Maggio 2005
Soluzioni (a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni insieme $A \neq \emptyset$, la classe $\{B \mid |B| = |A|\}$ *non* è un insieme.

Soluzione. Procediamo per assurdo e supponiamo che $\mathcal{A} = \{B \mid |B| = |A|\}$ sia un insieme. Vogliamo dimostrare che allora $\bigcup \mathcal{A} = \mathbf{V}$, contraddicendo il fatto che la classe universale $\mathbf{V}$ di tutti gli insiemi *non* è un insieme. Visto che $A \neq \emptyset$, fissiamo un elemento $a \in A$. Per ogni x, sia

$$B_x = \begin{cases} (A \setminus \{a\}) \cup \{x\} \text{ se } x \notin A\,; \\ A \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

In ogni caso, $x \in B_x \in \mathcal{A}$ (infatti banalmente $|B_x| = |A|$). Questo dimostra $\bigcup \mathcal{A} = \mathbf{V}$, come volevamo.

Esercizio 2. La *gerarchia di von Neumann* è definita per ricorsione transfinita ponendo:

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset\,; \\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)\,; \\ V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

Dimostrare che:

1. Ogni V_α è *transitivo*, cioè $\forall x\, \forall y\ (x \in y \in V_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha)$;
2. Se $\alpha \leq \beta$ allora $V_\alpha \subseteq V_\beta$;
3. Se $\alpha < \beta$ allora $V_\alpha \in V_\beta$.

Soluzione. (1). Procediamo per induzione transfinita su α. Se $\alpha = 0$, $V_0 = \emptyset$ è banalmente transitivo. Supponiamo ora $\alpha = \beta + 1$ successore. Se $x \in y \in V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)$, allora $x \in y \subseteq V_\beta$ e dunque $x \in V_\beta$. Se infine $\alpha = \lambda$ è limite e $x \in y \in V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma$, allora $x \in y \in V_\gamma$ per qualche $\gamma < \lambda$. Per ipotesi induttiva $x \in V_\gamma \subseteq V_\lambda$, quindi $x \in V_\lambda$ come volevamo.

(3). Per induzione transfinita su β. Se $\beta = 0$ non ci sono $\alpha < \beta$, e quindi la tesi è vera a vuoto. Se $\beta = \gamma + 1$ è successore e $\alpha < \beta$, allora $\alpha \leq \gamma$ e distinguo due casi. Se $\alpha = \gamma$, $V_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = \mathcal{P}(V_\gamma) = V_\beta$. Se $\alpha < \gamma$, per ipotesi induttiva $V_\alpha \in V_\gamma \in \mathcal{P}(V_\gamma) = V_\beta$, e la tesi $V_\alpha \in V_\beta$ segue dalla transitività di V_β, già dimostrata al punto (1). Se infine $\beta = \lambda$ è limite, da $\alpha < \beta$ segue che $\alpha < \gamma$ per qualche $\gamma < \beta$. Allora per ipotesi induttiva, $V_\alpha \in V_\gamma \subseteq V_\beta$, quindi anche in questo caso $V_\alpha \in V_\beta$.

(2). Se $\alpha = \beta$, la tesi è banale. Se $\alpha < \beta$, per la proprietà (3) si ha $V_\alpha \in V_\beta$. Ma V_β è transitivo per la (1), dunque $x \in V_\alpha \in V_\beta \Rightarrow x \in V_\beta$. Questo dimostra che $V_\alpha \subseteq V_\beta$ come volevamo.

Esercizio 3.

1. Mettere in ordine i seguenti sei ordinali:

   $(a)\ \omega^\omega\cdot(\omega+\omega)\,;\ (b)\ (\omega+\omega)\cdot\omega^\omega\,;\ (c)\ \omega^\omega\cdot\omega+\omega^\omega\cdot\omega\,;\ (d)\ \omega\cdot\omega^\omega+\omega\cdot\omega^\omega\,;\ (e)\ \omega^\omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega^\omega\,;\ (f)\ \omega\cdot\omega^\omega+\omega^\omega\cdot\omega.$

2. Dimostrare che se $\alpha < \beta$, allora $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$.

Soluzione. (1). Applicando la proprietà distributiva a destra, si ricava che il primo ordinale $(a) = \omega^\omega \cdot \omega + \omega^\omega \cdot \omega = (c) = \omega^{\omega+1} + \omega^{\omega+1}$. Il secondo ordinale $(b) = \omega^\omega$. Infatti $\omega^\omega \leq (b) = (\omega \cdot 2) \cdot \omega^\omega \leq \omega^2 \cdot \omega^\omega = \omega^{2+\omega} = \omega^\omega$. Adesso notiamo che $\omega \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$. Dunque $(d) = \omega^\omega + \omega^\omega$. Analogamente, il quinto ordinale $(e) = \omega^\omega \cdot \omega + \omega^\omega = \omega^{\omega+1} + \omega^\omega$. Infine, $(f) = \omega^\omega + \omega^\omega \cdot \omega = \omega^\omega \cdot (1+\omega) = \omega^\omega \cdot \omega = \omega^{\omega+1}$. Visto che:

$$\omega^\omega < \omega^\omega + \omega^\omega < \omega^{\omega+1} < \omega^{\omega+1} + \omega^\omega < \omega^{\omega+1} + \omega^{\omega+1},$$

concludiamo che $(b) < (d) < (f) < (e) < (a) = (c)$.

(2). Abbiamo visto a lezione che se $\alpha < \beta$, allora esiste ed unico γ con $\alpha + \gamma = \beta$. Dunque:

$$\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\alpha + \omega^{\alpha+\gamma} = \omega^\alpha + \omega^\alpha \cdot \omega^\gamma = \omega^\alpha \cdot (1 + \omega^\gamma) = \omega^\alpha \cdot \omega^\gamma = \omega^\beta.$$

Esercizio 4. Usando la disuguaglianza di König, dimostrare che per ogni cardinale κ, si ha $\kappa < \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$.

Soluzione. Sia $\mu = \mathrm{cof}(\kappa)$, e sia $f : \mu \to \kappa$ una funzione crescente illimitata. Allora $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mu} f(\alpha)$, quindi $\kappa \leq \sum_{\alpha<\mu} |f(\alpha)|$. (Visto che $\bigcup_{\alpha<\mu} f(\alpha)$ non è unione *disgiunta*, non vale in generale l'uguaglianza $\kappa = \sum_{\alpha<\mu} |f(\alpha)|$.) Notiamo che $f(\alpha) < \kappa \Rightarrow |f(\alpha)| < \mu$, e allora per la disuguaglianza di König, si ha:

$$\kappa \leq \sum_{\alpha<\mu} |f(\alpha)| < \prod_{\alpha<\mu} \kappa = \kappa^\mu = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}.$$

Esercizio 5. Sia $\alpha > 0$ un ordinale. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. α è *additivamente chiuso*, cioè se $\beta, \gamma < \alpha$ allora anche $\beta + \gamma < \alpha$;
2. Per ogni $\beta < \alpha$, $\beta + \alpha = \alpha$;
3. Esiste δ tale che $\alpha = \omega^\delta$.

Soluzione. (2) $\Rightarrow$ (1). Se $\beta, \gamma < \alpha$, banalmente $\beta + \gamma < \beta + \alpha = \alpha$ per ipotesi.

(1) $\Rightarrow$ (3). Procediamo per assurdo, mostrando che per ogni ordinale fissato δ, se $\omega^\delta < \alpha < \omega^{\delta+1}$ allora α *non* è additivamente chiuso. Visto che $\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega = \sup_{n<\omega} \omega^\delta \cdot n$, possiamo prendere $1 \leq n < \omega$ con $\omega^\delta \cdot n < \alpha \leq \omega^\delta \cdot (n+1)$. Ma allora:

$$\omega^\delta \cdot n + \omega^\delta \cdot n = \omega^\delta \cdot (n + n) \geq \omega^\delta \cdot (n+1) \geq \alpha,$$

e quindi α *non* è additivamente chiuso.

(3) $\Rightarrow$ (2). Fissiamo $\beta < \alpha = \omega^\delta$. Distinguiamo tre casi. Se $\delta = 0$, allora $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, dunque banalmente $\beta + \alpha = \alpha$. Se $\delta = \zeta + 1$ è successore, da $\beta < \omega^{\zeta+1} = \omega^\zeta \cdot \omega = \sup_{n<\omega} \omega^\zeta \cdot n$ segue che $\beta < \omega^\zeta \cdot n$ per qualche $n < \omega$. Allora deve essere $\beta + \alpha = \alpha$, in quanto

$$\alpha \leq \beta + \alpha = \beta + \omega^{\zeta+1} \leq \omega^\zeta \cdot n + \omega^\zeta \cdot \omega = \omega^\zeta(n + \omega) = \omega^\zeta \cdot \omega = \alpha.$$

(Qua abbiamo usato la proprietà $n + \omega = \omega$ per ogni $n < \omega$. Più in generale, si può dimostrare che $n + \alpha = \alpha$ per ogni ordinale infinito α.)

Esercizio 6. Dimostrare che $\prod_{n\in\omega}\aleph_n = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}$.

Soluzione. Poiché ogni $\aleph_n \leq \aleph_\omega$, si ha subito la disuguaglianza:

$$\prod_{n\in\omega}\aleph_n \leq \prod_{n\in\omega}\aleph_\omega = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}.$$

L'altra disuguaglianza non è immediata. Fissiamo una famiglia $\{\Lambda_k \mid k\in\omega\}$ di sottoinsiemi infiniti disgiunti di ω. Ad esempio, possiamo prendere $\Lambda_k = \{p_k^{n+1} \mid n\in\omega\}$, dove $p_0 < p_1 < p_2 < \ldots$ è la successione dei numeri primi. Notiamo che, per ogni k fissato,

$$\prod_{n\in\Lambda_k}\aleph_n \geq \sum_{n\in\Lambda_k}\aleph_n = \max\{\sup_{n\in\Lambda_k}\aleph_n\,;\,|\Lambda_k|\,\} = \aleph_\omega.$$

Denotiamo con $\Lambda\subseteq\omega$ l'unione (disgiunta) di tutti i Λ_k. Allora abbiamo che:

$$\prod_{n\in\omega}\aleph_n \geq \prod_{n\in\Lambda}\aleph_n = \prod_{k\in\omega}\Big(\prod_{n\in\Lambda_k}\aleph_n\Big) \geq \prod_{k\in\omega}\aleph_\omega = (\aleph_\omega)^{\aleph_0}.$$