Elementi di Logica Matematica
Secondo Test del 3 Maggio 2005
Soluzioni (a cura di M. Di Nasso)

Esercizio 1. Per ogni $q \in \mathbb{Q}$, denotiamo con $\mathbb{Q}_q = \{q' \in \mathbb{Q} \mid q' < q\}$ il taglio di Dedekind generato da q. Ricordiamo che per ogni taglio di Dedekind positivo $X \supset \mathbb{Q}_0$, si definiva

- $1/X = \mathbb{Q}_{1/q}$ se $X = \mathbb{Q}_q$ per qualche $q \in \mathbb{Q}$; $\quad 1/X = \{1/q \mid q \notin X\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$ altrimenti.

Dimostrare che per ogni taglio di Dedekind positivo $X \supset \mathbb{Q}_0$, si ha $(X) \cdot (1/X) = \mathbb{Q}_1$.

Soluzione. Se X è della forma $X = \mathbb{Q}_q$, allora $X \cdot (1/X) = \mathbb{Q}_q \cdot \mathbb{Q}_{1/q} = \mathbb{Q}_{q\cdot(1/q)} = \mathbb{Q}_1$ (qua abbiamo usato la proprietà che il prodotto tra tagli di Dedekind è coerente con il prodotto tra razionali, cioè che per ogni $q, q' \in \mathbb{Q}$ vale $\mathbb{Q}_q \cdot \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{q\cdot q'}$). Passiamo ora al caso generale. Visto che X è positivo, anche $1/X$ è positivo e dunque, applicando le definizioni:

$$X \cdot (1/X) = \left\{x \cdot y \mid x \in X^+ \wedge\ y \in (1/X)^+\right\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0} = \left\{x/x' \mid x \in X^+ \wedge\ x' \notin X\right\} \cup \mathbb{Q}_{\leq 0}.$$

(Ricordiamo che per ogni taglio di Dedekind Y, si denotava con $Y^+ = \{y \in Y \mid y > 0\}$ il sottoinsieme dei suoi elementi positivi. Inoltre $\mathbb{Q}_{\leq 0} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$ denota l'insieme dei razionali non positivi.)

Prendiamo $x \in X$ e $x' \notin X$ qualunque. L'elemento x' è un maggiorante di X, dunque $x' > x$ e $x/x' < 1$. Questo dimostra l'inclusione $X \cdot (1/X) \subseteq \mathbb{Q}_1$.

Viceversa, per ogni $q \in \mathbb{Q}_1$, vogliamo dimostrare che $q \in X \cdot (1/X)$. Se $q \leq 0$, prendendo un qualunque $y \notin X$, abbiamo che $qy \leq 0$. Dunque $qy \in X$ e $q = \frac{qy}{y} \in X \cdot (1/X)$. Supponiamo allora $0 < q < 1$ positivo. Se troviamo un elemento $x \in X$ tale che $x/q \notin X$, abbiamo finito perché in questo caso $q = x \cdot \frac{1}{x/q} \in X \cdot (1/X)$. Fissiamo $a \in X$ positivo. La successione $\{a \cdot \frac{1}{q^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è illimitata, e possiamo prendere $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \cdot \frac{1}{q^n} \notin X\} > 0$. Ma allora $x = a \cdot \frac{1}{q^{n-1}} \in X$ e $x/q = a \cdot \frac{1}{q^n} \notin X$, come voluto.

Esercizio 2. Un insieme ordinato infinito $(A, <)$ si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso numerabile. Dimostrare che se A è separabile, allora $|A| \leq \mathfrak{c}$.

Soluzione. Prendiamo B un sottoinsieme denso numerabile di A. Sia $f : A \to \mathcal{P}(B)$ la funzione dove:

$$f(a) = A_a = \{a' \in A \mid a' < a\}.$$

Se $a_1 < a_2$, per densità esiste $b \in B$ con $a_1 < b < a_2$. Allora $b \in f(a_2)$ e $b \notin f(a_1)$, dunque $f(a_1) \neq f(a_2)$, e questo mostra che f è iniettiva. Visto che per ipotesi $|B| = \aleph_0$, abbiamo allora che $|A| \leq |\mathcal{P}(B)| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, come volevamo.

Esercizio 3. Dimostrare che i seguenti insiemi hanno la cardinalità del continuo:

1. $\mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n\ f(n) \neq n\}$;
2. $\mathcal{F}_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ bigezione}\}$;
3. $\mathcal{F}_3 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ illimitata}\}$;
4. $\mathcal{F}_4 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0\}$.

Soluzione. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ sono tutti sottoinsiemi di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, dunque intanto $|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2|, |\mathcal{F}_3| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

(1). Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, consideriamo la funzione $\vartheta_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dove

$$\vartheta_A(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \in A \\ n+2 & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

Chiaramente $\vartheta_A \in \mathcal{F}_1$, e inoltre la funzione $\vartheta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}_1$ dove $\vartheta : A \mapsto \vartheta_A$ è iniettiva. Dunque vale anche la disuguaglianza $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{F}_1|$.

(2) e (3). Se $A = \{a_0 < \ldots < a_n\} \subset \mathbb{N}$ è finito, definiamo $\sigma(a_0) = a_1, \sigma_A(a_1) = a_2, \ldots, \sigma_A(a_n) = a_0$ e $\sigma_A(n) = n$ se $n \notin A$. Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è un sottoinsieme infinito, definiamo per induzione $a_0 = \min A$ e $a_{n+1} = \min\{a \in A \mid a > a_n\}$, così da avere $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Poniamo allora $\sigma_A(a_n) = a_{n+1}$ se l'indice n è pari, $\sigma_A(a_n) = a_{n-1}$ se l'indice n è dispari, e $\sigma_A(n) = n$ se $n \notin A$. In questo modo, per ogni $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ abbiamo definito una bigezione $\sigma_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la proprietà che $\{n \mid \sigma_A(n) \neq n\} = A$. Questo garantisce che la funzione $\sigma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{F}_2$ dove $\sigma : A \mapsto \sigma_A$, è iniettiva, e perciò $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{F}_2|$.[1]

(3). Visto che ogni bigezione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è necessariamente illimitata, cioè $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3$, la disuguaglianza $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{F}_3|$ segue dal punto precedente.

(4). Intanto banalmente la corrispondenza $r \mapsto \{r\}$ determina una funzione iniettiva da $\mathbb{R}$ a valori in $\mathcal{F}_4$, dunque $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{F}_4|$. Viceversa, consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}_4$ che associa ad ogni successione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la corrispondente immagine, cioè $\varphi : \sigma \mapsto \{\sigma(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. È immediato verificare che φ è suriettiva, dunque $|\mathcal{F}_4| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, come voluto.[2]

Esercizio 4. Sia $(A, <)$ un sottoinsieme *bene ordinato* di $(\mathbb{R}, <)$. Dimostrare che $|A| \leq \aleph_0$.

Soluzione. Visto che A è bene ordinato, ogni elemento $a \in A$ ha un successore immediato a^+. Per densità esiste allora un numero razionale q_a con $a < q_a < a^+$. La funzione $f : A \to \mathbb{Q}$ definita ponendo $f(a) = q_a$ è chiaramente iniettiva, dunque $|A| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ come voluto.[3]

Esercizio 5. Sia $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{N} \mid |A| < \aleph_0\}$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$. Definiamo le relazioni:

- $A \prec_1 B \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in B \setminus A$ con $A \cap n = B \cap n$;
- $A \prec_2 B \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in B \setminus A$ con $\{a \in A \mid a > n\} = \{b \in B \mid b > n\}$.

Dimostrare che:

1. $(\mathcal{F}, \prec_1)$ è totalmente ordinato ma non bene ordinato;
2. $(\mathcal{F}, \prec_2)$ è bene ordinato;
3. $(\mathcal{F}, \prec_2)$ è isomorfo a $(\mathbb{N}, <)$.

Soluzione. (1). Per ogni coppia di insiemi diversi $A \neq B$ in $\mathcal{F}$, sia $n_{A,B}$ il più piccolo elemento che li distingue, cioè il più piccolo elemento che appartiene ad uno ma non all'altro dei due insiemi A e B:

$$n_{A,B} = \min\{n \mid n \in A \setminus B \text{ oppure } n \in B \setminus A\}.$$

[1] L'esistenza di questa funzione σ *non* richiede l'assioma di scelta, perchè σ_A è esplicitamente definita per ogni A.

[2] In questa dimostrazione del punto (4) si è usato l'assioma di scelta quando dall'esistenza di una funzione suriettiva $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{F}_4$ abbiamo dedotto che $|\mathcal{F}_4| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$, cioè abbiamo dedotto l'esistenza di una funzione iniettiva $\psi : \mathcal{F}_4 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

[3] Si può definire una tale funzione f anche senza usare l'assioma di scelta. Ad esempio, si può porre $q_a = n/m$ dove $m = \min\{m' \in \mathbb{N} \mid 1/m' < a^+ - a\}$ e $n = \min\{n' \in \mathbb{N} \mid n'/m > a\}$.

Per definizione, $A \prec_1 B$ se e solo se $n_{A,B} \in B$. In particolare, $\prec_1$ soddisfa allora la proprietà di *ordine totale*, cioè se $A \neq B$, allora $A \prec_1 B$ oppure $B \prec_1 A$ (a seconda se $n_{A,B} \in B$ oppure $n_{A,B} \in A$, rispettivamente). Vediamo ora che $\prec_1$ è *antisimmetrica.* Se per assurdo fosse $A \prec_1 B$ e $B \prec_1 A$, allora avremmo sia $n_{A,B} \in B$ che $n_{A,B} \in A$, contro la definizione di $n_{A,B}$. Supponiamo ora $A \prec_1 B$ e $B \prec_1 C$. Prendiamo $n = \min\{n_{A,B}, n_{B,C}\}$. Per ogni $i < n$, $i \in A \Leftrightarrow i \in B \Leftrightarrow i \in C$, cioè $A \cap n = B \cap n = C \cap n$. Per mostrare che $n \in C \setminus A$, distinguiamo due casi. Se $n = n_{A,B} < n_{B,C}$, allora $n \notin A$ e inoltre $n \in B \Leftrightarrow n \in C$, in quanto $n < n_{B,C}$. Analogamente, se $n = n_{B,C} < n_{A,B}$, $n \in C$ e inoltre $n \notin B \Leftrightarrow n \notin A$, in quanto $n < n_{A,B}$. Chiaramente, il terzo caso $n = n_{A,B} = n_{B,C}$ non si presenta, altrimenti avremmo contemporaneamente $n \in B$ e $n \notin B$. Concludiamo che $A \prec_1 C$, dunque $\prec_1$ soddisfa la proprietà *transitiva.* Infine $\prec_1$ *non* è un buon ordine, come mostrato ad esempio dalla seguente catena discendente:

$$\{0\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \{2\} \succ_1 \ldots \succ_1 \{n\} \succ_1 \{n+1\} \succ_1 \ldots$$

(2). In modo simile a sopra, per ogni coppia di insiemi diversi $A \neq B$ in $\mathcal{F}$, consideriamo $k_{A,B}$ il più grande elemento che li distingue, cioè il più grande elemento che appartiene ad uno ma non all'altro dei due insiemi A e B:

$$k_{A,B} = \max\{n \mid n \in A \setminus B \text{ oppure } n \in B \setminus A\}.$$

Chiaramente un tale $k_{A,B}$ esiste sempre perché gli insiemi A e B sono finiti. Dalle definizioni, segue allora che $A \prec_2 B$ se e solo se $k_{A,B} \in B$. In particolare, $\prec_2$ soddisfa la proprietà di *ordine totale*: se $A \neq B$, allora $A \prec_2 B$ oppure $B \prec_2 A$ (a seconda se $k_{A,B} \in B$ oppure $k_{A,B} \in A$, rispettivamente). La proprietà *antisimmetrica* di $\prec_2$ si dimostra esattamente come al punto (1). Anche per la proprietà *transitiva* si procede analogamente a sopra, considerando però $k = \max\{k_{A,B}, k_{B,C}\}$ (anziché $n = \min\{n_{A,B}, n_{B,C}\}$).

Se $\max A < \max B$, allora dal fatto che da $\{a \in A \mid a > \max B\} = \emptyset = \{b \in B \mid b > \max B\}$ e che $\max B \in B$, segue $A \prec_2 B$. Equivalentemente, questo significa che se $B \not\prec_2 A$, cioè se $A \preceq_2 B$, allora $\max B \leq \max A$. Dunque per ogni A fissato, il segmento iniziale:

$$S_A = \{B \in \mathcal{F} \mid B \prec_2 A\} \subseteq \{B \mid \max B \leq \max A\}$$

è finito (più precisamente, $|S_A| \leq |\mathcal{P}(\{0, 1, \ldots, \max A\})| = 2^{\max A+1}$). In generale, un ordine totale dove tutti i segmenti iniziali propri sono finiti, è necessariamente isomorfo all'ordinale ω. In particolare, $(\mathcal{F}, \prec_2)$ è isomorfo a ω, come voluto.

FACOLTATIVO. Una famiglia $\mathcal{A}$ si dice *quasi disgiunta* se per ogni $A, A' \in \mathcal{A}$ con $A \neq A'$, l'intersezione $A \cap A'$ è finita. Dimostrare che esiste una famiglia quasi disgiunta di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ avente la cardinalità del continuo.
[Sugg. Senza perdita di generalità, al posto di $\mathbb{N}$ si può prendere un opportuno altro insieme di cardinalità numerabile.]

Soluzione. Consideriamo l'insieme $\mathrm{Seq}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ delle sequenze finite di numeri naturali. Come già visto a lezione, $|\mathrm{Seq}(\mathbb{N})| = \aleph_0$. Per ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sia $\Phi_f = \{f \restriction \in \omega\}$ l'insieme delle restrizioni di f ai segmenti iniziali $n = \{0, \ldots, n-1\}$ di $\mathbb{N}$ (precisamente si definiva $f \restriction n = \{(i, f(i)) \mid i = 0, \ldots, n-1\}$). La corrispondenza $\Phi : f \to \Phi_f$ determina una funzione iniettiva da $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a valori in $\mathcal{P}(\mathrm{Seq}(\mathbb{N}))$. Allora la famiglia $\mathcal{F} = \{\Phi_f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = \mathrm{Range}(\Phi)$ ha cardinalità $|\mathcal{F}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Siano ora Φ_f, Φ_g due elementi distinti di $\mathcal{F}$, in corrispondenza di due funzioni distinte $f \neq g$ in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Se $n = \min\{k \mid f(k) \neq g(k)\}$, allora $f \restriction i$ per ogni $i = 0, \ldots, n$, mentre $f \restriction j \neq g \restriction j$ per $j > n$. Dunque l'intersezione $\Phi_f \cap \Phi_g$ è finita (di cardinalità $n+1$), e $\mathcal{F}$ è una famiglia *quasi disgiunta* di sottoinsiemi di $\mathrm{Seq}(\mathbb{N})$.