

file: c5fev03.tex

**Meccanica Razionale 5/2/2003 vecchio ordinamento
USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI**

Primo Esercizio

Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 - 2ye^x) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^2([0, 1]); y(0) = 0, y(1) = 0\}.$$

Trovare l'estremale del funzionale e provare che si tratta di un minimo assoluto A .

Secondo Esercizio

Studiare il sistema autonomo

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \sin(x) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(x) \right).$$

In particolare: 1) Trovare un integrale primo del sistema. 2) Trovare i punti singolari e classificarli. 3) Disegnare il diagramma di fase complessivo.

Prova al calcolatore (a) Tracciare il diagramma di fase risolvendo numericamente le equazioni per vari valori iniziali. (b) Tracciare il diagramma di fase disegnando, tramite MAPLE, alcuni insiemi di livello dell'integrale primo del sistema.

Primo esercizio. L'equazione di eulero del funzionale é

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$$

La soluzione generale é data da

$$\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$ si trova l'estremale del funzionale e cioé

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{(-x + xe^{-2} + 1 - e^{-2x})e^x}{-1 + e^{-2}}.$$

Valutando l'incremento del funzionale si verifica facilmente che si tratta di un minimo assoluto.

Secondo Esercizio.

Lo spazio delle fasi naturale del sistema é $S^1 \times \mathbf{R}$. Il sistema é hamiltoniano di hamiltoniana:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x)^2$$

Tutte le informazioni relative al diagramma di fase sono deducibili dallo studio del grafico della funzione $V(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x)^2$. In particolare si trovano i seguenti punti singolari:

$(0, 0)$ *centro*

$(\frac{\pi}{4}, 0)$ *sella*

$(\pi, 0)$ *centro*

$(\frac{7\pi}{4}, 0)$ *sella*