

*file: c11feb04.tex*

**Meccanica Razionale e Analitica 11/02/2004 nuovo ordinamento**

**Meccanica Razionale 11/02/2004 vecchio ordinamento**

**USARE FOGLI DIVERSI PER ESERCIZI DIVERSI**

Risolvere due dei seguenti quattro esercizi e le prove al calcolatore

### **Primo Esercizio**

Considerare il funzionale

$$J(y) = \int_0^1 (y''^2 + 2xy) dx$$

nella classe di funzioni ammissibili

$$A = \{y(x) \in C^4([0, 1]); y(1) = 0, y'(1) = 0\}.$$

Provare che esiste il minimo assoluto e trovarlo.

### **Secondo Esercizio**

Studiare il sistema autonomo

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \sin(x) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(x) \right)$$

sul cilindro  $[0, 2\pi] \times \mathbf{R}^1$ . In particolare: 1) Trovare i punti singolari e classificarli. 2) Trovare l'equazione complessiva delle separatrici nei punti di sella. 3) Disegnare il diagramma di fase.

### Terzo Esercizio

1) Trovare l'armonica coniugata  $v(x, y)$  della funzione

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 6xy - 2x$$

tale che  $v(0, 0) = 0$ .

2) Trovare la funzione  $f(z)$  della variabile complessa  $z = x + iy$  tale che  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

3) Considerare il sistema dinamico discreto generato dalla funzione  $f(z) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ . Trovare i punti fissi e studiarne la stabilità.

### Quarto Esercizio

Un disco sottile, omogeneo, pesante di raggio  $R$  e massa  $M$  è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale giacente nel piano del disco, posto ad una distanza  $\frac{R}{2}$  dal centro dal centro  $C$  del disco e coincidente con l'asse  $Ox_1$  di un riferimento cartesiano ortogonale destro  $Ox_1x_2x_3$  di versori  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  il cui asse  $Ox_3$  è verticale e orientato verso il basso. Sia poi  $OX_1X_2X_3$  un riferimento solidale al disco di versori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  tale che  $Ox_1 = OX_1$  mentre  $\mathbf{e}_3 = \frac{OC}{|OC|}$ . Sulla circonferenza del disco è libero di muoversi senza attrito un punto materiale pesante  $P$  di massa  $m$  soggetto ad una forza elastica attrattiva di legge  $\mathbf{F} = -k(P - O)$ ,  $k$  costante positiva. Assumere come parametri lagrangiani l'angolo  $\phi$  formato dai versori  $\mathbf{i}_3$  ed  $\mathbf{e}_3$  e l'angolo  $\theta$  formato da  $\mathbf{e}_3$  e  $CP$ . Trovare la lagrangiana del sistema

### **Prima Prova al calcolatore**

Trovare tramite MAPLE il minimo assoluto del primo esercizio.

### **Seconda Prova al calcolatore**

Tracciare tramite il comando "implicitplot" il grafico delle separatrici nei punti di sella relativi al secondo esercizio.