Capitolo 1

Polinomi

1.1 Prima lezione

1.1.1 Operazioni elementari

Ricordiamo brevemente alcune nozioni di base sui polinomi.

Definizione 1.1. [AAX00] *Definiamo come* $\mathbb{R}[x]$ *l'insieme dei polinomi a coefficenti in* $\mathbb{R}$. *Dato un polinomio*

$$f(x) \in \mathbb{R}[x],\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{con } a_n \neq 0$$

1. *Il* grado *di* $f(x)$ *è* n, *e si scrive* $\deg f(x)$.
2. *I reali* $a_n, \ldots, a_0$ *sono i* coefficenti *del polinomio.*
3. *I* termini *del polinomio sono gli* x^i *per cui il corrispondente coefficente* a_i *sia non nullo.*
4. *Il* termine di testa *di* $f(x)$ *è* x^n.
5. *Il* coefficente di testa *di* $f(x)$ *è* a_n.
6. *Il* termine noto *di* $f(x)$ *è* a_0 *(abuso di notazione - termine è ambiguo ma di uso corrente).*

Osservazione 1.2. [AAA04] *Il grado del polinomio* 0 *non è definito.*

Esempio 1.3. [AAA03] *Dato* $f(x) = x^5 + 2x - 1$

1. $\deg(f(x)) = 5$.
2. *Il coefficente di testa di* $f(x)$ *è* 1. *Il termine noto è* -1.

3. *I coefficenti di* $f(x)$ *sono* $a_5 = 1, a_4 = 0, a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = -1$. *I termini di* $f(x)$ *sono* $x^5, x^1, 1 = x^0$.

4. *Il termine di testa è* x^5.

Definizione 1.4. `[AAA01]` *Siano* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. *Allora*

- *Principio di identità dei polinomi:*

$$f(x) \equiv_{\mathbb{R}[x]} g(x) \Leftrightarrow n = m \text{ e } \forall\ i : 0, \ldots, n\ a_i = b_i$$

- *Somma e prodotto*

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max n,m} (a_i + b_i)x^i$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{d=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{d} a_i + b_i \right) x^d$$

Esempio 1.5. `[AAX03]`

- *I polinomi* $f(x) = x^5 + 2x - 1$ *e* $g(x) = x^3 + 2x - 1$ *sono diversi dato che hanno grado diverso* $f(x) \not\equiv_{\mathbb{R}[x]} g(x)$.

- $x^2 - 2x + 1 \not\equiv_{\mathbb{R}[x]} x^2 - 2x + 2$ *dato che hanno il termine noto diverso*

Esercizio 1.6. `[AAX04]` *Dire per quali* $a \in \mathbb{R}$, *i polinomi* $x^2+4x-1, ax^2+(3a-1)x+5a\mathbb{R}[x]$ *sono uguali.*

I polinomi hanno lo stesso grado. Per avere $x^2 + 4x - 1 \equiv ax^2 + (3a - 1)x + 5a$ *dobbiamo avere che i coefficienti sono uguali uno a uno, ovvero*

$$\begin{cases} 1 = a & \text{grado 2} \\ 4 = 3a - 1 & \text{grado 1} \\ -1 = 5a & \text{grado 0} \end{cases}$$

Dato che dalla prima equazione si ottiene $a = 1$ *e dalla seconda* $a = -\frac{1}{5}$, *il sistema è impossibile e i polinomi sono diversi per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *(*$\forall\ a \in \mathbb{R}$*).*

Osservazione 1.7. *Ricordiamo che l'espressione*

$$x^2 \equiv_{\mathbb{R}[x]} 1$$

è una uguaglianza tra polinomi, il cui risultato è FALSO, mentre l'espressione

$$x^2 = 1$$

è una equazione sui reali, le cui soluzioni sono $x = \pm 1$. *In questo secondo caso, l'insieme delle soluzioni dell'equazione si può scrivere, più formalmente, come*

$$\{x \in \mathbb{R} \ \mid\ x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \ \mid\ x^2 - 1 = 0\} = \{\pm 1\}$$

Osservazione 1.8. [AAA05] *Il polinomio somma di due polinomi ha grado minore od uguale al massimo dei gradi dei due. Il polinomio prodotto di due polinomi ha grado la somma dei gradi dei due polinomi, se nessuno dei due è nullo.*

Esempio 1.9. *Siano dati* $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ *polinomi in* $\mathbb{R}[x]$. *Allora*

$$\begin{aligned}(x^2{+}2x - 1) \cdot (x^3 - x^2 + x + 2) &= \\ &= (x^2 \cdot x^3) + (x^2 \cdot (-x^2) + 2x \cdot x^3) + (x^2 \cdot x + 2x \cdot (-x^2) - 1 \cdot x^3) + \ldots + (-1 \cdot 2) \\ &= (x^5) + (-x^4 + 2x^4) + (x^3 - 2x^3 - x^3) + \ldots - 2 \\ &= x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2\end{aligned}$$

Osservazione 1.10. [AAC07] *Ricordiamo che ogni numero pari si può scrivere come* $2n$ *ed ogni numero dispari come* $2n + 1$ *per un opportuno* n *intero. Se preferite dirlo in altro modo, per ogni numero intero dispari* a *esiste* n *intero tale che* $a = 2n + 1$. *Oppure possiamo dire*

$$\forall\ a \text{ intero } \ \exists\ n \text{ intero } \ \text{tale che } a = 2n + 1$$

Analogamente per i pari.

Osservazione 1.11. [AAA02] *Dati* $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Ricordiamo le formule*

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
2. $a^2 + b^2$ *non si può fattorizzare su* $\mathbb{R}$.
3. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
5. *Teorema del Binomio [Dimostrazione per induzione. Cfr. corso di Analisi.]*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

dove $\binom{n}{i}$ *è l'elemento della* n*-esima riga,* i*-esima colonna del triangolo di Tartaglia. Ricordiamo che*

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{k!(n - i)!} \qquad \text{dove } n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ e } 0! = 1$$

Esempio 1.12. [AAA08] *Abbiamo che*

$$\begin{aligned}(2x - 3)^4 = &\binom{4}{0} \cdot (2x)^4 \cdot (-3)^0 + \binom{4}{1} \cdot (2x)^3 \cdot (-3)^1 + \binom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot (-3)^2 + \\ &+ \binom{4}{3} \cdot (2x)^1 \cdot (-3)^3 + \binom{4}{4} \cdot (2x)^0 \cdot (-3)^4\end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned}
\binom{4}{0} &= \frac{4!}{0!4!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = 1\\
\binom{4}{1} &= \frac{4!}{1!3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot(3\cdot 2\cdot 1)} = 4\\
\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)(2\cdot 1)} = 6\\
\binom{4}{3} &= \frac{4!}{3!1!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot 1} = 4\\
\binom{4}{4} &= \frac{4!}{4!0!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot 1} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16x^4 + 4\cdot(8x^3)\cdot(-3) + 6\cdot(4x^2)\cdot 9 + 4\cdot(2x)\cdot(-27) + 81\\
&= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81
\end{aligned}$$

Esercizio 1.13 (Proposto)**.** *Scrivere per quanto possibile le formule per*

1. $a^5 - b^5$.
2. $a^7 + b^7$.
3. $a^4 - b^4$.
4. $a^{2n+1} \pm b^{2n+1}$ *(esponente dispari).*
5. $a^{2n} \pm b^{2n}$ *(esponente pari).*
6. $a^{15} - b^{15}$.
7. $a^{16} - b^{16}$.

Esercizio 1.14 (Proposto)**.** *Calcolare le seguenti potenze*

1. $(x+2)^4$
2. $(3x-1)^5$
3. $(x+1)^9$

Esercizio 1.15 (Proposto)**.** *Dire, al variare di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, quando sono uguali i polinomi* $3(a-b+2c)x^2-(a+b)x-a+b-c$, $(a+b+c-d)x^3+2x^2-(2a+b-c)x+3$.