Simulazione 1 - Soluzioni

1. Utilizzando la forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$ si ottiene
$$\rho^3 e^{i3\theta} = \theta + \pi/6$$
osservando che $e^{i3\theta} = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$ ed eguagliando le parti reali e immaginarie del primo membro con quelle del secondo membro si ottiene il seguente sistema
$$\begin{cases} \rho^3\cos(3\theta) = \theta + \pi/6 \\ \rho^3\sin(3\theta) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{\dfrac{\pi(2k+1)}{6\cos(k\pi)}} \\ \theta = \dfrac{k\pi}{3}\,, k \in Z \end{cases}$$
ρ non può essere qualsiasi, in particolare se k è pari($\cos(k\pi) > 0$) allora $2k+1 \geq 0 \to k \geq 0$ se k è dispari($\cos(k\pi) < 0$) allora $2k+1 \leq 0 \to k \leq -1$. Tra tutti questi numeri bisogna trovare per quali k il numero complesso ha modulo minimo, poiché il denominatore vale o 6 o -6, bisogna minimizzare il numeratore che ha modulo minimo quando $k = 0\ e\ k = -1$. Otteniamo così le seguenti soluzioni
$$z_1 = \frac{\pi}{6} \quad z_2 = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}e^{-i\pi/3}$$
L'equazione potrebbe anche essere risolta direttamente dalla forma esponenziale, si ottengono così due sistemi
$$\begin{cases} \rho^3 = \theta + \dfrac{\pi}{6} \\ 3\theta = 2k\pi, \quad k \in Z \\ \theta + \dfrac{\pi}{6} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho^3 = \left|\theta + \dfrac{\pi}{6}\right| \\ 3\theta = -\pi + 2m\pi\,, \qquad m \in Z \\ \theta + \dfrac{\pi}{6} < 0 \end{cases}$$
ρ assume valore minimo nel primo sistema se $k = 0$ e nel secondo sistema se $m = 0$ ottenendo le soluzioni precedentemente ottenute.

2. Calcolando gli sviluppi di taylor del denominatore
$$e^{-x/8} = 1 - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{128} + o(x^2) \qquad \frac{1}{2}\sin\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{12}x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x}\,)$$
$$\sqrt{1-\sqrt{x}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{x}{8} - \frac{x\sqrt{x}}{16} - \frac{5x^2}{128} + o(x^2)$$
Si ottiene
$$\left(e^{-x/8} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2} - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x} = \frac{7}{48}x^2 + o(x^2)$$

Sviluppando il numeratore al secondo ordine
$$\frac{x}{4}e^{-x} = \frac{x}{4}(1 - x + o(x)) = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) \qquad \sqrt{\cos x} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$
$$\sqrt{\cos\sqrt{x}} = \sqrt{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24}} = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{96} + o(x^2)$$

$$\sqrt{\cos\sqrt{x}} - \sqrt{\cos x} + \frac{x}{4}e^{-x} = -\frac{x^2}{96} + o(x^2)$$

Si ottiene quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cos\sqrt{x}} - \sqrt{\cos x} + \frac{x}{4}e^{-x}}{\left(e^{-x/8} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2} - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{96} + o(x^2)}{\frac{7}{48}x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{14}$$

3. Il limite presenta la forma indeterminata 0^0, raccogliendo un 4^n si ottiene che l'argomento della radice presenta un termine infinitesimo ($n/4^n$ o $3/4^n$) che permette di utilizzare taylor
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{4^n+n} - \sqrt[n]{4^n+3}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\left(4\sqrt[n]{1+n/4^n} - 4\sqrt[n]{1+3/4^n}\right)^{1/n}$$
In particolare risulta
$$\sqrt[n]{1+n4^{-n}} = e^{\frac{\log(1+n4^{-n})}{n}} \approx e^{4^{-n}} \approx 1 + 4^{-n}$$
$$\sqrt[n]{1+3\cdot 4^{-n}} = e^{\frac{\log(1+3\cdot 4^{-n})}{n}} \approx e^{3/(n4^n)} \approx 1 + \frac{3}{n4^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{4^n+n} - \sqrt[n]{4^n+3}\right)^{1/n} \approx \lim_{n\to+\infty}\left(4\left(1+\frac{1}{4^n}\right) - 4\left(1+\frac{3}{n4^n}\right)\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{4^n} - \frac{12}{n4^n}\right)^{1/n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\cdot\sqrt[n]{4-\frac{12}{n}} \approx \frac{1}{4}$$

4. Affinché sia invertibile la funzione deve essere bigettiva, ossia suriettiva ed iniettiva. Si osservi che $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = +\infty$ e la funzione è continua poiché è composizione di funzione continue. Perché la funzione sia bigettiva, essa dovrà essere monotona decrescente (dovrà quindi avere la derivata prima sempre negativa), imponendo così l'iniettività e la suriettività (la sua immagine coincide con l'insieme di arrivo)

$$f'_\alpha(x) = -2e^{-2x}(x^2 + \alpha x + 1/2) + e^{-2x}(2x+\alpha) = e^{-2x}(-2x^2 + 2x(1-\alpha) + \alpha - 1) < 0$$
$$f'_\alpha(x) < 0 \to 2x^2 + 2x(\alpha-1) + 1 - \alpha > 0$$

Perché tale disequazione sia valida su tutto l'asse reale il delta deve essere negativo ossia

$$\Delta = 4(\alpha-1)^2 - 8(1-\alpha) \le 0 \to (\alpha-1)(\alpha+1) \le 0 \to -1 \le \alpha \le 1$$

5. Perché le curve siano tra loro tangenti si devono imporre due condizioni, la prima è che le ordinate siano le stesse nel punto di tangenza, la seconda è che le derivate prime siano uguali nel punto di tangenza(queste due condizioni comportano avere la medesima retta tangente). Si ottiene quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x} + q = x^2 - q \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x \end{cases} \to \begin{cases} q = -3\sqrt[3]{16}/32 \\ x = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$
Si osservi che il segno di q poteva essere determinato attraverso un'interpretazione grafica

6. La successione può essere trovata in maniera esplicita

$$a_1 = \alpha + 2 \rightarrow a_2 = \alpha + \frac{3}{2} \rightarrow a_3 = (\alpha + 1)^2 + \frac{1}{3} \rightarrow a_4 = (\alpha + 1)^6 + \frac{1}{4} \rightarrow \cdots$$
$$\ldots \rightarrow a_n = (\alpha + 1)^{(n-1)!} + \frac{1}{n} \rightarrow a_{n+1} = (\alpha + 1)^{n!} + \frac{1}{n+1}$$

Si dimostra ora per induzione che tale espressione è quella corretta. Per $n = 1$ si può verificare facilmente che l'equazione è soddisfatta, per un n generico si ha

$$a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n+1} = \left((\alpha + 1)^{(n-1)!}\right)^n + \frac{1}{n+1} = (\alpha + 1)^{n!} + \frac{1}{n+1}$$

L'espressione coincide con quella ottenuta precedentemente, per cui per studiare il comportamento della successione per ricorrenza basta studiare quello della successione a_n

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (\alpha + 1)^{(n-1)!} + \frac{1}{n} = \begin{cases} 1 & se\ \alpha = 0 \\ +\infty & se\ \alpha > 0 \end{cases}$$

7. Osservando che $sin\theta$ può essere inserito dentro la sommatoria, e che l'integrale della somma è pari alla somma degli integrali(questo perché l'integrale è un operatore lineare) si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{k} sin(n\theta)\right) sin\theta d\theta = \lim_{k\to+\infty} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{k} \sin\theta \cdot sin(n\theta)\right) d\theta =$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \left[\int_0^\pi \sin\theta\, sin(n\theta) d\theta\right] =$$
$$= \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta + \int_0^\pi \sin\theta \sin(2\theta)\, d\theta + \cdots + \int_0^\pi \sin\theta \sin(k\theta)\, d\theta$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int \sin\theta \sin(n\theta)\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{\cos x \sin(nx) - n \sin x \cos(nx)}{n^2 - 1} & se\ n \neq 1 \\ \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} & se\ n = 1 \end{cases}$$

Osservando che

$$\int_0^\pi \sin\theta\, sin(n\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & se\ n \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & se\ n = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta + \int_0^\pi \sin\theta \sin(2\theta)\, d\theta + \cdots + \int_0^\pi \sin\theta \sin(k\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} + 0 + 0 + \cdots + 0 = \frac{\pi}{2}$$

8. Per determinare lo sviluppo di Taylor è necessario utilizzare la forma $e^{\log}$

$$(\cos x)^x = e^{x \log(\cos x)}$$

Per lo sviluppo del termine $\log(\cos x)$ bisogna ottenere un polinomio di grado quattro, questo perché è moltiplicato da un termine di grado 1. Si ottiene così un polinomio di grado 5 all'esponente

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$
$$(\cos x)^x = e^{-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)} = 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)$$

9. Poiché l'integrale deve avere un valore finito, è necessario trovare per quali valori di m l'integrale converge. Calcolando gli zeri del denominatore si ottiene

$$x(\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \to x = 0, e, 1/e$$

L'integrale presenta come estremi di integrazione 1 e m[1], i primi due valori che annullano il denominatore e fanno "scoppiare" la funzione sono $e, 1/e$. Inizialmente si può quindi affermare che per $1/e < m < e$ l'integrale converge, bisogna ora chiedersi se i seguenti integrali

$$\int_1^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x - x} \qquad \int_1^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x - x}$$

convergono. Se convergesse, ad esempio, quello con $m = 1/e$, allora m potrebbe superare il valore $1/e$ e spingersi fino allo 0 e si potrebbe affermare che l'integrale converge se $0 < m < e$. Per verificare se l'integrale con $m = 1/e$ converge conviene effettuare un cambio di variabile

$$\int_1^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x - x} \to \ln x = y \to \frac{1}{x}dx = dy \to \int_0^{-1} \frac{dy}{(y-1)(y+1)}$$

e ovviamente l'integrale diverge. Analogamente, si può verificare che l'integrale con $m = e$ diverge, per cui infine si ha che l'integrale converge se $1/e < m < e$.

Per risolvere l'integrale si effettua il cambio precedentemente adottato, ottenendo

$$\int_0^{\ln m} \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln m - 1}{\ln m + 1}\right| = \frac{1}{2} \to \left|\frac{\ln m - 1}{\ln m + 1}\right| = e$$

Dall'equazione precedentemente ottenuta si ottengono due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\ln m - 1}{\ln m + 1} = e & se \;\; \ln m < -1 \cup \ln m > 1 \\ \dfrac{\ln m - 1}{\ln m + 1} = -e & se \;\; -1 < \ln m < 1 \end{cases}$$

Per determinare quella corretta si deve pensare ai valori di m precedentemente ottenuti, $\frac{1}{e} < m < e \to -1 < \ln m < 1$ per cui l'equazione corretta risulta

$$\frac{\ln m - 1}{\ln m + 1} = -e \to m = e^{(1-e)/(1+e)}$$

10. Affinché l'integrale converga bisogna fare in modo che il denominatore non abbia soluzioni reali su tutto l'asse reale, per cui si ha, se $a \neq 0$

$$ax^4 + x^2 + 1 = 0 \to (x_1)^2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a} \quad (x_2)^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}$$

---

[1] Se gli estremi di integrazione fossero stati -1 e m allora avremmo dovuto verificare se a $-\infty$ e 0 l'integrale convergesse

Per non avere soluzioni bisogna innanzitutto imporre la condizione $1-4a<0 \rightarrow a>1/4$, la seconda condizione è che la soluzione di modulo massimo, $\left(-1+\sqrt{1-4a}\right)/2a$, sia negativa cosicché l'equazione $(x_2)^2=\left(-1+\sqrt{1-4a}\right)/2a$ risulterà impossibile. Si ottiene quindi

$$\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}<0 \rightarrow 0<a\leq 1/4$$

Dall'unione delle due soluzioni si ottiene $a>0$, si osservi che per $a=0$ l'integrale non converge poiché la funzione all'infinito si comporta come $1/x$.

11. Applicando il criterio del rapporto per la prima serie si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}(3n+3)!}\cdot\frac{n^n(3n)!}{n!\,(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}}{(n+1)}\approx$$
$$\approx\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{27n^4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=0$$

La prima serie converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\log n-\frac{2\log^2 n}{\log(1+n^2)}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\log n}{\log(1+n^2)}[\log(1+n^2)-2\log n]\right]\approx$$

$$\approx\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\log\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)-2\log n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\log(n^2)+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-2\log n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\approx$$

$$\approx\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^2}$$

La seconda serie converge.

Date che $\frac{1}{\sqrt{n}}\rightarrow 0$, applicando taylor si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\approx\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

La terza serie converge.

12. La serie presenta due comportamenti. Se $|x|>1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{(1+x)^n}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^n}$$

Entrambe le serie esterne convergono, applicando il criterio della radice ennesima, se

$$\frac{1}{|1+x|}<1\rightarrow|1+x|>1\rightarrow x<-2\cup x>0$$

Tale soluzione deve essere intersecata con il dominio $|x| \geq 1$

$$\begin{cases} |x| \geq 1 \\ x < -2 \cup x > 0 \end{cases} \rightarrow x < -2 \cup x \geq 1$$

Se $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n} \approx \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

Applicando il criterio della radice ennesima si ottiene

$$\frac{|x|}{|1+x|} < 1 \rightarrow |x| < |1+x| \rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Tale soluzione deve essere intersecata con il dominio $|x| < 1$

$$\begin{cases} |x| < 1 \\ x > -1/2 \end{cases} \rightarrow -1/2 < x < 1$$

Dall'unione dei due insiemi si ottiene

$$\{x < -2 \cup x \geq 1\} \cup \{-1/2 < x < 1\} = \{x < -2 \cup x > -1/2\}$$

13. L'equazione differenziale è a variabili separabili, si ottiene quindi

$$\int \frac{dy}{(y^2-1)} = \int \tan x \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = -\ln|\cos x| + c$$

Dalla condizione $y(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$$\ln \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{\cos^2 x}$$

La soluzione risulta confinata nella regione $-1 < y < 1$ in quanto deve passare per l'origine degli assi e presenta due asintoti orizzontali, $y = \pm 1$. Sciogliendo opportunamente il modulo avremo

$$\frac{y-1}{y+1} = -\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow y = -\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$$

14. Dato che $y(x)$ è una funzione dispari, si ha un' ulteriore condizione $y(0) = 0$. Indicando con $y_o(x)$ la soluzione dell'omogenea si ha

$$y'''(x) + y'(x) = 0 \rightarrow z^3 + z = 0 \rightarrow z = 0, \pm i \rightarrow y_o(x) = A + B\cos x + C \sin x$$

La soluzione particolare sarà una funzione di primo grado poiché $\int_0^\pi y(t)dt$, indipendentemente da quale sia la funzione, da comunque un numero. Indicando con $y_p(x) = ax + b$ la soluzione della particolare si ha

$$y_p'''(x) + y_p'(x) = \int_0^\pi \big(y_o(t) + y_p(t)\big)\, dt \rightarrow a = \int_0^\pi (A + B\cos t + C \sin t + at + b) dt \rightarrow$$

$$\rightarrow a = A\pi + 2C + \frac{a\pi^2}{2} + b\pi$$

Si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} a = A\pi + 2C + \dfrac{a\pi^2}{2} + b\pi \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\pi^2}{2} a = (A+b)\pi + 2C \\ A + B + b = 0 \\ C + a = 1 \end{cases}$$

Poiché la soluzione dell'equazione deve essere una funzione dispari, allora dovrà essere una somma di funzioni dispari, si ottiene quindi la condizione che B deve essere nullo[2]. Il sistema diventa

$$\begin{cases} (2-\pi^2)a = 4C \\ C + a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{6-\pi^2} \\ C = \dfrac{\pi^2 - 2}{\pi^2 - 6} \end{cases}$$

La soluzione risulta quindi

$$y(x) = \frac{\pi^2 - 2}{\pi^2 - 6} \sin x + \frac{4}{6-\pi^2} x$$

[2] Tale risultato si può ottenere anche imponendo la condizione $y''(x) = 0$