Prova libera n. 12

Esercizio 1

Si determini le coppie (z, w) soluzioni del seguente sistema complesso

$$\begin{cases} (z+w)^2 = i \\ |z|^2 + |w^2| = 1 \end{cases}$$

tali che $|w|$ sia massimo

Esercizi

Determinare $\max, \min, \inf,\ e \sup$ $\quad$ nell' intervallo $(1/2, 2]$ della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x-1}$$

Esercizio 3

Determinare il valore del parametro reale $a \in [0,1]$ per cui l'integrale

$$f(a) = \int_0^1 x\,|x-a|dx$$

risulta minimo. Calcolare poi il valore minimo dell'integrale.

Esercizio 4

Tra le seguenti serie o i seguenti integrali, determinare quelli che risultano convergenti

$$\sum_{n\geq 1} \left((2+n)^{1/n} - (1+n)^{1/n}\right) \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \qquad \sum_{n\geq 1} \log(\cos^{\alpha}(1/n))\,, \alpha \in R \qquad \int_0^1 \frac{\sin x + 2}{\log x} dx$$

Esercizio 5

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{x^2-1}} \\ y(\sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

Determinare inoltre l'intervallo di esistenza massimale

Esercizio 6

Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine 5(compreso), per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin x}$$

Esercizio 7

Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\left(e^{x^2 \cos x} - e^{x \sin x}\right) + x^4}{x^6}$$

Esercizio 8

Stabilire se il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} - x}}\, dx$$

è convergente ed in caso calcolarlo

PARTE B

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{x}\right)^n$$

a) Determinare il dominio della funzione (per quali x la serie converge)
b) Utilizzando la somma della serie geometrica di $f'(x)$, determinare $f(x)$
c) Si studi qualitativamente la seguente funzione

$$F(x) = \int_1^x f_n(t)dt$$

Quanto vale F(1/2)?

d) Si calcoli, per quale valore del parametro reale $\alpha > 0$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{((2-x)^\alpha - 1)^\alpha}$$

risulta finito e non nullo. Si calcoli inoltre il valore del limite

Esercizio 2

Si consideri la seguente funzione $f_k(x) = x^k \log x$ con k parametro reale

a) Si determini per quali valori di k le funzioni $g_k(x) = f_k(x)/(1-x)$ sono integrabili in $[0,1]$

b) Si calcoli li seguente limite[1]

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 g_k(x)\, dx$$

c) Stabilire se il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$$

è convergente ed in caso calcolarlo[1]

d) Determinare la somma della seguente serie[2]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^2}$$

---

[1] Si approssimi la funzione $1/(1-x)$ mediante il suo polinomio di Taylor di ordine n e successivamente si passi al limite $n \to +\infty$. Si ricordi che

$$\sum_{n\geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$$

[2] Utilizzare la tecnica usata nel punto b dell'esercizio 1