Prova libera n. 11

1. Determinare i valori del parametro $t \in \mathbf{R}$ tale che il numero complesso $z = \exp(1/t + i\pi t/2)$ verifichi le condizioni

$$|z| < 1, \qquad Re(z) > 0, \qquad Im(z) > 0.$$

2. Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t)\, dt}{x(x^2 - \sin^2 x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt - \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt}{x - \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt}.$$

3. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \Big((4^n + 3)^{1/n} - (3^n + 4)^{1/n}\Big)^{n3^n}.$$

4. Determinare un polinomio $P(x)$ a coefficienti reali tale che

$$P(0) = 0, \qquad P'(0) = 0, \qquad P'(1) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^3} = 1.$$

5. Determinare per quali valori del parametro reale α risulta convessa su tutto $\mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = e^x - \alpha x^3.$$

6. Tra le seguenti successioni definite per ricorrenza indicare quelle che ammettono limite finito

$$\begin{cases} a_{n+1} = (100 + a_n)/n \\ a_1 = 100 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = (100 \cdot a_n)/n \\ a_1 = 100 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n(n+1)/n \\ a_1 = 1 \end{cases}.$$

7. Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha \int_0^\alpha \sqrt{\frac{\alpha - x}{x}}\, dx, \qquad \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \sqrt{\frac{\alpha - x}{x}}\, dx.$$

8. Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{m}{m+1} \ : \ n, m \in \mathbf{N} \right\} .$$

9. Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} |\sin x| e^{-x} \, dx \ .$$

10. Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ il seguente integrale converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2}(1 + x^{3/2})}{x^\alpha \log(1 + x^\beta)} \, dx \ .$$

11. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n} \ .$$

12. Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ la seguente serie converge

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n} \cos(n\pi) + 2 + \sin n}{n^\alpha \log^\beta n} \ .$$

13. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = y^2 - 2xy + x^2, \qquad y(0) = 0.$$

14. Dato il problema di Cauchy

$$y' = |y| + x^2, \qquad y(a) = 0,$$

determinare i valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ per cui la soluzione ha derivata seconda continua. Per tali valori calcolare poi la soluzione.